2014 年後期　物理学 C2（木曜 4 限　担当：身内） 期末試験

2015 年 1 月 29 日 4 限

試験開始時刻 15:10 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。必要に応じて参考資料の定義、値を使用すること。

第一問（次元）（配点 5）

圧力 p と体積 V の積がエネルギーの次元になることを説明せよ。左辺の説明には応力の定義を含めること。右辺の説明には何かしらのエネルギーを示してその次元を計算すること。

(解答例) 圧力 p は応力の一種である。 応力は単位面積当たりの力であるので、(部分点 1 点)
その次元は $[\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{L}]^{-1}$(部分点 1 点)。
左辺の次元は $[\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^{-1} \times [\mathrm{L}]^3 = [\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^2$ となる。(部分点 1 点)。
エネルギーの次元は、
運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ では $[\mathrm{M}]^1 \times ([\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{L}]^1)^2 = [\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^2$
位置エネルギー mgh では $[\mathrm{M}]^1 \times [\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^1 \times [\mathrm{L}]^1 = [\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^2$
仕事 Fx では $[\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^1 \times [\mathrm{L}]^1 = [\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^2$
(いずれかを示して部分点 1 点、左辺とつりあって部分点 1 点) 単位のみで示しても、正しければ可とする。部分点はなし。

第二問（流体力学）（配点 20）

流体に関して以下の問に答えよ。

1) 定常流の完全流体に関して、以下の量を流体の密度 ρ、流速 v、流体の圧力 p、重力エネルギーの基準からの高さ z、重力加速度 g 及び問題文中で定義される変数を用いて表せ。

- 単位時間に面積 S の断面を通過する流体の体積 Q(流量)
- 単位時間に面積 S の断面を通過する流体の質量 m'
- 単位体積あたりの運動エネルギー E'_{k}
- 単位体積あたりの重力による位置エネルギー E'_{p}

(配点 4)
(採点基準) 各 1 点
(解答例)$Q = Sv$,$m' = \rho Sv (= \rho Q)$, $E'_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\rho v^2$, $E_p = \rho gz$
2)1) より、流体では

$$\rho Sv = \mathrm{const.} \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \mathrm{const.} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

が成り立つ。式 (1) 及び式 (2) が物理的に何を意味するか説明せよ。

(配点 4)
(採点基準) 各 2 点
(解答例) 式 1 は次元が $[\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{L}]^0$ で単位時間あたりに流れる質量であり、質量の保存を表す。式 1 は次元が $[\mathrm{M}]^1[\mathrm{T}]^{-2}[\mathrm{L}]^{-1}$ で単位質量あたりのエネルギーで、エネルギーの保存を示す。「保存」の言葉がないと 2 点。

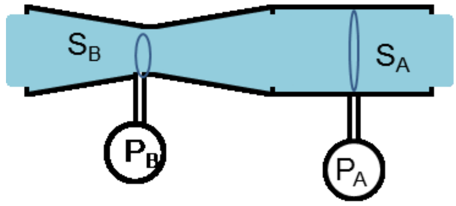

図 1: 2-3) 解答例

3) ベルヌーイの定理の応用として、ベンチュリ管と呼ばれる装置がある。「」内に記した以下の原理を図にせよ。
「断面積が一様でない管の 2 点 A、B での圧力 $p_{\rm A}$ および $p_{\rm B}$ を測定することで、流量 Q を求めることができる。」
図中には $p_{\rm A}$、$p_{\rm B}$、A、B での断面積を $S_{\rm A}$ および $S_{\rm B}$ を記入すること。また、$p_{\rm A} > p_{\rm B}$ となるように図を描くこと。
(配点 4)
(解答例) 図 1 に示す。(採点基準)$p_{\rm A}$、$p_{\rm B}$、$S_{\rm A}$、$S_{\rm B}$ 各 1 点。A,B 逆は 2 点。

4) ベンチュリー管にベルヌーイの定理を適用、式 (2) に対応する方程式を立てよ。但しベンチュリー管中では重力エネルギーの差は無視できるものとする。
(配点 4)
(解答例)$p_{\rm A} + \frac{1}{2}\rho v_{\rm A}^2 = p_{\rm B} + \frac{1}{2}\rho v_{\rm B}^2$
5) ベンチュリー管を用いて、水の流量を測定することを考えよう。4) の方程式を解くと

$$Q = S_{\rm A} S_{\rm B} \sqrt{\frac{2(p_{\rm A} - p_{\rm B})}{\rho(S_{\rm A}^2 - S_{\rm B}^2)}} \tag{4}$$

と示される。この式を用いて、通常の管部が $10\,{\rm cm}^2$ の管中を流れる水の流量を測定することを考えよう。管の一部を $1{\rm cm}^2$ と細くして通常の管部との圧力差を測定したところ、$2.0\,{\rm N}\cdot{\rm cm}^{-2}$ だった。この時の流量 Q を有効数字 2 桁、単位付きで求めよ。
(採点基準) 代入して 1 点。単位の換算 1 点。計算して 1 点。
単位の換算なしで式に代入は（$2[{\rm cm}^3{\rm s}^{-1}]$ になる。)、1 点 (N の単位が合わない)。(配点 4)
(解答例)$10\,{\rm cm}^2 = 10\times10^{-4}\,{\rm m}^2$,$1\,{\rm cm}^2 = 1\times10^{-4}\,{\rm m}^2$,$1{\rm g}\cdot{\rm cm}^{-3} = 1\times10^3{\rm kg}\cdot{\rm m}^{-3}$,
$2.0{\rm N}\cdot{\rm cm}^{-2} = 2.0\times10^4{\rm N}\cdot{\rm m}^{-2}$。代入して

$$\begin{aligned}
Q &= S_{\rm A} S_{\rm B} \sqrt{\frac{2(p_{\rm A} - p_{\rm B})}{\rho(S_{\rm A}^2 - S_{\rm B}^2)}} && (5)\\
&= 10\times10^{-4}[{\rm m}^2]\times1\times10^{-4}[{\rm m}^2]\sqrt{\frac{2\times2.0\times10^4[{\rm N}\cdot{\rm m}^{-2}]}{1\times10^3[{\rm kg}\cdot{\rm m}^{-3}]\cdot((10\times10^{-4}[{\rm m}^2])^2-(1\times10^{-4}[{\rm m}^2])^2)}} && (6)\\
&= 10\times10^{-8}[{\rm m}^4]\sqrt{\frac{4\times10^4[{\rm kg}\cdot{\rm m}\cdot{\rm s}^{-2}{\rm m}^{-1}]}{1\times10^3[{\rm kg}\cdot{\rm m}^{-3}]\cdot(100-1)\times10^{-8}[{\rm m}^4]}} && (7)\\
&\simeq 10\times10^{-8}[{\rm m}^4]\sqrt{\frac{4\times10^4[{\rm kg}\cdot{\rm m}\cdot{\rm s}^{-2}\cdot{\rm m}^{-1}]}{100\times10^{-5}[{\rm kg}\cdot{\rm m}]}} && (8)\\
&= 10\times10^{-8}[{\rm m}^4]\sqrt{4\times10^7[{\rm m}\cdot{\rm s}^{-2}{\rm m}^{-2}]} && (9)\\
&= 6.3\times10^{-4}[{\rm m}^3{\rm s}^{-1}] = 630[{\rm cm}^3{\rm s}^{-1}] && (10)
\end{aligned}$$

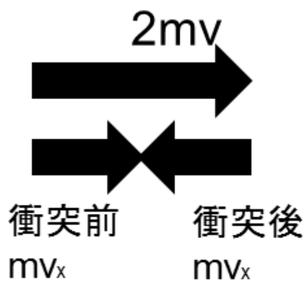

図 2: 3-2) 解答例

第三問（気体分子運動論）（配点 15）

単原子理想気体分子の運動に関して、以下の問いに答えよ。

1) 質量 m の気体分子が 1 辺 L、容積 V の立方体の容器中を速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で自由に運動していることを考える。分子が 1 回衝突する際に、x 軸に垂直な壁（2 枚のうち x 座標の大きい方の壁）が受ける力積 f を図示せよ。図には、衝突前の分子の持つ運動量、衝突後の分子の持つ運動量、壁が受ける力積をベクトルで示し、それぞれの大きさも m,L,v_x, v_y, v_z から必要な物を用いて示すこと。
(配点 2)
(解答例) 図 2 に示す。(採点基準) 全て正しくて 2 点

2) 1) で考えた壁が単位時間の間にひとつの分子から受ける力積を m,L,v_x, v_y, v_z から必要な物を用いて表せ。
(配点 4)
(採点基準)
(解答例) ひとつの分子が衝突する周期 $T = 2L/v_x$。(部分点 2 点)
$F = f/T = 2mv_x/(2L/v_x) = \frac{mv_x^2}{L}$(部分点 2 点)

3) 1~2) を基にして

$$< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T \tag{11}$$

という関係式を導け。また、ボルツマン定数 k_{B} の物理的意味を説明せよ。
(配点 4)
(解答例)x, y, z の対称性から $mv_x^2 = mv_y^2 = mv_z^2 = \frac{1}{3} < mv^2 >$。(部分点 1 点)
よって $p = nN_AF/L^2 = nN_A\frac{mv_x^2}{L^3} = nN_A\frac{1}{3}\frac{mv^2}{L^3} = nN_A\frac{1}{3}\frac{<mv^2>}{V}$。$3pV = nN_A < mv^2 >= 3nRT$(部分点 1 点)
。よって $< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$(部分点 1 点)
ただしボルツマン定数 $k_B = \frac{R}{N_A}$ は分子 1 個あたりの気体定数。(部分点 1 点)

5) 4) の式から、常温での窒素分子 ($\mathrm{N_2}$) の運動する典型的な速度 $\sqrt{< v^2 >}$ を有効数字 1 桁で計算せよ。ただし窒素原子の原子量 14 を用いてよい。
(配点 5)
(採点基準)$v = \sqrt{3k_{\mathrm{B}}T/m}$ の形にして 1 点。k_{B}, T, m の代入に対してそれぞれ 1 点。計算 1 点。単位無しは 1 点減点。

(解答例) T=300K、$m = 28 \cdot 1.67 \times 10^{-27}$ [kg] を代入。

$$v = \sqrt{\frac{3k_{\mathrm{B}}T}{m}} \tag{12}$$
$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \times 10^{-23}\,[\mathrm{J \cdot K^{-1}}] \cdot 300\,[\mathrm{K}]}{28 \cdot 1.67 \times 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]}} \tag{13}$$
$$= \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 300}{28 \times 1.67} \times 10^4\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}} \tag{14}$$
$$= 500\mathrm{m \cdot s^{-1}} \tag{15}$$

第四問（カルノーサイクル）（配点 15）

１モルの理想気体を作業物質とする熱機関に関して以下の問いに答えよ。

1) 以下に記す熱サイクルを横軸 V 縦軸 p の図に示せ。
温度 T_1 の高熱温源と温度 T_2 の低熱温源（$T_1 > T_2$）を用いて次の変化をおこなわせる。
a) 高熱源に接触した A の状態にある系を、熱平衡を保ちながら準静的に等温膨張させて B の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_1、系の受けた仕事を W_1 とする。
b) B の状態から断熱膨張をさせて C の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_2、系の受けた仕事を W_2 とする。
c) 低熱源に接触させ、熱平衡を保ちながら準静的に等温圧縮させて D の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_3、系の受けた仕事を W_3 とする。
d) D の状態から断熱変化をさせて A の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_4、系の受けた仕事を W_4 とする。
図には A、B、C、D、各過程には等温もしくは断熱の文字を示すこと。
また、W_3 を図示せよ。
(配点 3)
(解答例) 図 3 に示す。
(採点基準) 外形、ABCD 位置関係正しくて 1 点、等温 2 箇所断熱 2 箇所正しくて 1 点、$W_3$1 点。

2) b) の過程について、気体の内部エネルギーの変化 ΔU と Q_2、W_2 の間に成り立つ式を示せ。また、断熱過程であることを表す式を書け。
(配点 4)
(解答例)ΔU=Q_2+W_2,$Q_2 = 0$
(採点基準)2 点+2 点
3) 圧力 p の状態で dV の体積変化があった場合の、系の受ける仕事 δW を p、dV を用いて表せ。また、体積が V_1 から V_2 まで変化した時の系の受ける仕事 W を積分記号を用いて表せ。
(配点 4)
(解答例)$-pdV$,$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV$
(採点基準)2 点 (符号逆は 0 点)+2 点 (符号逆は 0 点)

4) 1)~3) より、熱機関としてのカルノーサイクルの効率は

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{16}$$

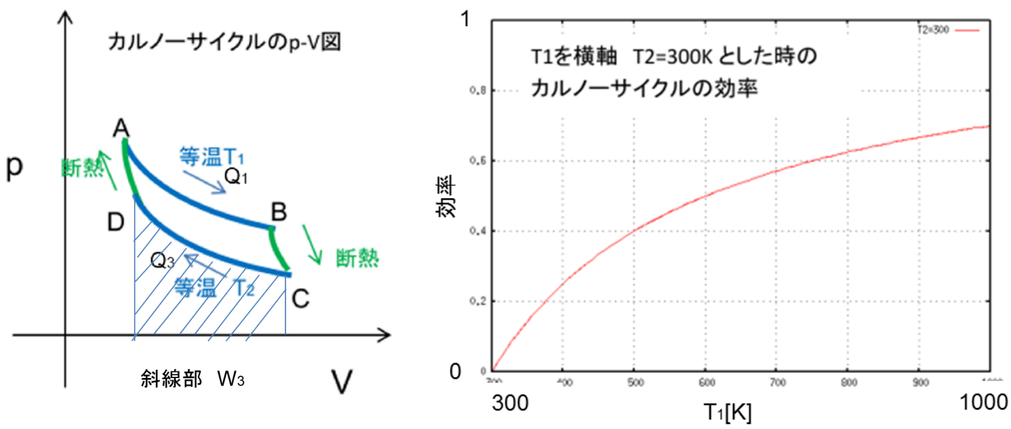

図 3: 4-1),5) 解答例

と表される。T_2 として常温を考え、T_1 を横軸、η を縦軸としたグラフを書け。縦軸には、0、0.5、1 の目盛を打つこと。横軸は最大値を 1000K とし、$\eta = 0$ および $\eta = 0.5$ となる横軸を明記すること。
(配点 4)
(解答例) 図に 3 示す。
(採点基準) 単調増加曲線 1 点。(300,0),(600,0.5),(1000,0.7) 通ってそれぞれ 1 点。

第五問（エントロピー））（配点 5）

1 モルの気体分子が体積 V_{A} の容器 A に温度 T_{A} で入っている。細管で接続された真空の V_{B} の容器 B との間にあるコックを開ける。容器外との熱のやり取りを無視して以下の問いに答えよ。

1) 平衡状態になったときのそれぞれの容器の気体の温度 T'_{A},T'_{B} を求めよ。理由も記すこと。
(配点 2)
(解答例) 気体は仕事をせず、断熱変化なので、$T'_{\mathrm{A}} = T'_{\mathrm{B}}$=$T_{\mathrm{A}}$
(採点基準) それぞれ 1 点

2) 全ての分子が容器 A にある確率 W_{A} 容器 B にある確率 W_{B} との比 $W_{\mathrm{A}}/W_{\mathrm{B}}$ を求めよ。
(配点 2)
(解答例) 一つの分子について、$W_{\mathrm{A}} = V_{\mathrm{A}}/(V_{\mathrm{A}} + V_{\mathrm{B}})$1 モルなので、$N_{\mathrm{A}}$ 個の分子を考える。$W_{\mathrm{A}}/W_{\mathrm{B}} = (V_{\mathrm{A}}/V_{\mathrm{B}})^{N_{\mathrm{A}}}$ (採点基準) 一つの分子について考えて部分点 1 点。N_{A} 個を明記して部分点 1 点。

3)$S(A) = R \log V_{\mathrm{A}}$ と表される状態量を考えたとき、$S(B) - S(A)$ を W_{A},W_{B} およびボルツマン定数 k_{B} を用いてあらわせ。
(配点 1)
(解答例)$S(A) - S(B) = R \log V_{\mathrm{A}} - R \log V_{\mathrm{B}} = R \log \frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} = R \log \frac{(}{W_{\mathrm{A}}} W_{\mathrm{B}})^{1/N_{\mathrm{A}}} = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}} \log \frac{W_{\mathrm{A}}}{W_{\mathrm{B}}} = k_{\ rmB} \log \frac{W_{\mathrm{A}}}{W_{\mathrm{B}}}$
(採点基準) 代入の式で部分点 1 点。W を入れて部分点 1 点。

A　参考資料

必要に応じて以下の関係式や変数を用いること。

A.1　数学公式

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{18}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{19}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{20}$$

A.2　定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
陽子の質量	m_{H}	$1.67{\times}10^{-27}\mathrm{kg}$
氷点の絶対温度		273.15K
ボルツマン定数	k_{B}	$1.38\times10^{-23}\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

A.3　原子量

水素	H	1.0
炭素	C	12.0
窒素	N	14.0
酸素	O	16.0

A.4　様々な物質の定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.49	0.91-0.96
水	$-$	-	1.0