2014年度後期　物理学C2（木曜4限　担当：身内） 中間試験 解答例

2014年12月4日4限

準備でき次第試験開始 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。

第一問（次元）（配点 5(+4)）

表1（次元テーブルと呼ぶ）を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。
速度 $\dot{x}(\equiv \frac{dx}{dt})$、加速度 $\ddot{x}(\equiv \frac{d^2x}{dt^2})$、運動量 $p(\equiv m\dot{x})$、力 $F(\equiv m\ddot{x})$、位置エネルギー $E_p(= mgx)$。
但し、[M] は質量、[T] は時間、[L] は長さの次元を表すものとする。

採点基準 各1点

解答例

[M]=1

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0	ρ						
-1					p		
-2			E	k	F	E_{p}	

[M]=0

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1				ω	$\dot{x}$		
-2					$\ddot{x}$		

表 1: 次元テーブル

第二問（振動と波動）（配点 20(-2)）

1) 質量 m の質点を摩擦の無視できる床上に置き、ばね定数 k のばねで垂直な壁に接続する。つり合いの位置から変位 u を与えた時の図を描け。図には原点、変位 u、質点、ばね、働く力（矢印）を記入すること。
また、このときの運動方程式を書け。

配点 5

採点基準

(図の描画) すべて正しくて各2点。

(運動方程式) 正しくて3点。符号間違いは0点。その他の誤記は各-1点。

解答例

(図の描画) 図1の通り。

(運動方程式)

$$m\ddot{u}(t) = -ku(t) \tag{1}$$

2) 1) の解答の運動方程式の解のうちのひとつは

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{2}$$

と書け、単振動をする。ω を k, m を用いて表せ。また、現実的な k, m を仮定して、単振動の周期 T を計算せよ。

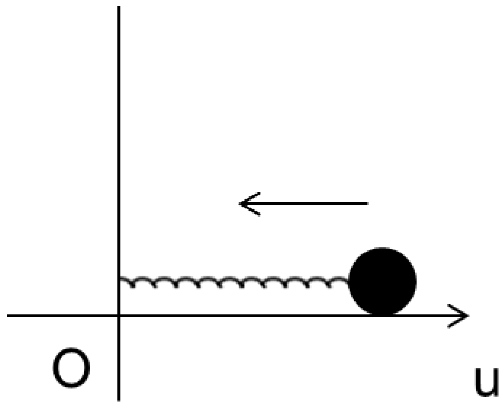

図 1: 第二問　1) 解答例

配点 7

採点基準 $\ddot{u}(t)$ の式に $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ を代入して部分点 2 点

解答例

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2}{dt^2} A\sin(\omega t + \phi) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

運動方程式 (1) 式より

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k}{m} u(t) \tag{4}$$

と合わせて

$$\ddot{u}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)) = -\frac{k}{m} u(t) = -\frac{k}{m} A\sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

よって $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。ここまで 4 点。

採点基準 現実的な k, m の設定で部分点 1 点 (単位無しはなし)、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ の記述で 1 点。計算して 1 点。

解答例

$M = 1\mathrm{kg}$ のおもりで $x = 10\mathrm{cm}$ 伸びるばねに $m = 1\mathrm{kg}$ のおもりをぶら下げた時の単振動を考える。$Mg = kx$ より、$k = Mg/x$。$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。$T = \frac{2\pi}{\omega}$ なので、$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{Mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.0\times0.1}{1.0\times9.8}} = 0.6[s]$。

途中式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ より、単振動の周期 T は、おもりの質量 m が大きいほど、ばね定数 k が小さいほど、長くなる。

3) 式 (2) の変位を持つ波をを考える。この波が $v > 0$ で $+x$ 方向に進む時の波の式 $u(x, t)$ を表せ。また、この式が波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ。

配点 6

採点基準 $u(x, t)$ の記述で 3 点。符号違い、位相 ϕ 無しは各 1 点減点。波動方程式を示して 3 点。

解答例

$u(x, t) = A\sin(\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi)$。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A\sin(\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi) = -A\omega^2 \sin(\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi) \tag{6}$$

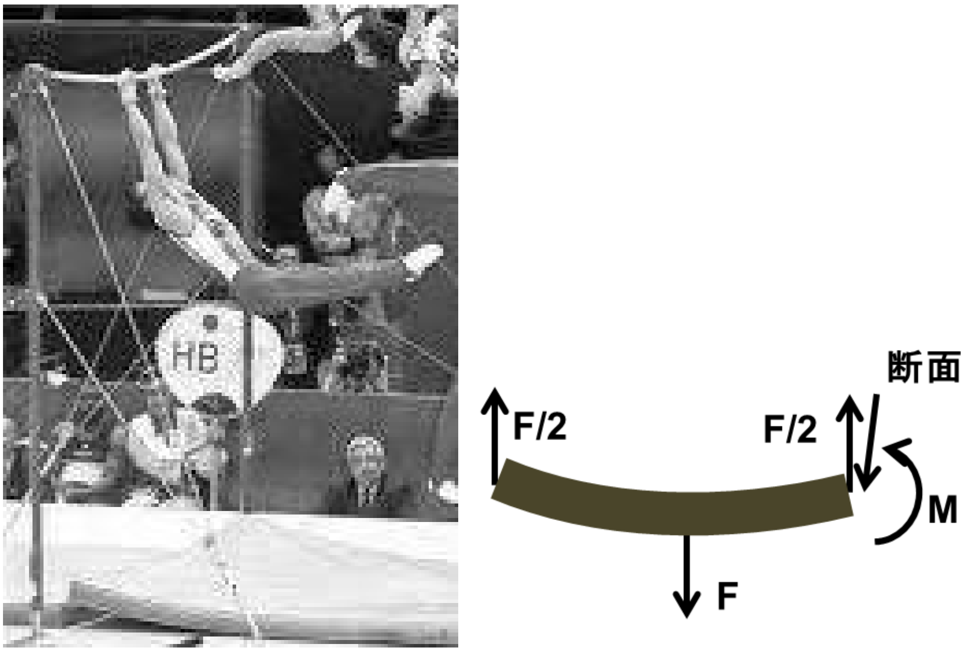

図 2: 鉄棒（左）。中心を含む部分の力、モーメントのつり合い（右）。

と

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi) = -A\frac{\omega^2}{v^2}\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi) \tag{7}$$

より波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たす。

5) ばね定数 k、振動数 ω を次元テーブルに記入せよ。

配点 2。(第一問で勘案。)

採点基準 各 1 点。

第三問（弾性体のたわみ）（配点 15）

図 2 左の写真の様な情況を、弾性体のモデルとして考える。

1) 棒を弾性体として考えることで、たわみを計算することができる。棒を適当な箇所 (中心を原点とした時の座標を x とする) で仮想的に切断することを考える。2 分された棒のうちで、中心を含む部分の力のモーメントのつり合いを図 2 右に示す。ここで、M は仮想断面での弾性応力による回転モーメントである。図 2 右を参考にして、中心を含まない部分（棒の逆側）の力のモーメントのつり合いの図を描け。棒の質量は無視して良い。また、下向きの力は一点にかかっているとする。

配点 5

採点基準 端の上向き 1 点、人間下向き、右部分からの力各 1 点、おもりの逆端にに回転力あれば 1 点、方向も正しくて 1 点。

解答例

図 3 の通り。

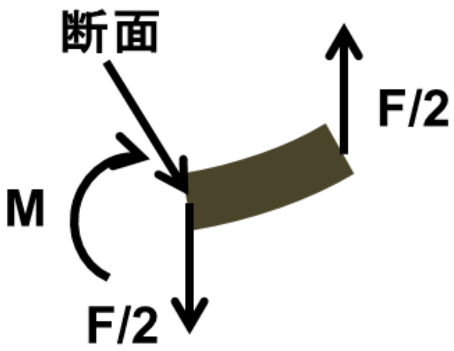

図 3: 第二問 1) 解答例

2) 棒の長さを l としたときに、図 2 右の力のモーメントのつり合いは、
$(l/2+x)\cdot\frac{F}{2}-x\cdot F-M=0$
と書ける。ここで、断面を回転の中心とし、右回りの回転を正とした。また、棒の中心を原点として、棒に沿って x 軸をとった。1) で考えた、中心を含まない部分の力のモーメントのつり合いの式を書け。

配点 4
採点基準 解答例
$-(l/2-x)\cdot F/2+M=0$
3) 2) を解き、適当な数学的近似を加えると、たわみが

$$y=\frac{mgl^3}{16\pi r^4 E} \tag{8}$$

として与えられる。ここで y は $x=0$ でのたわみの大きさ、r は棒の半径、g は重量加速度、E は棒のヤング率である。ここで、$F=5mg$ は説明なしに用いてよい。写真などから、m, r, l, y に適当な数値を見積もって代入して、E を有効数字 1 桁で求めよ。この計算結果と参考資料の値をを比較して、モデル及び代入した数値の妥当性について論ぜよ。

配点 6
採点基準) m, r, l, y の見積もりで計 3 点（妥当性は無視）。数値計算 1 点。結果に単位 1 点。妥当性の議論してあれば 1 点。 解答例
$m=50$kg,$r=1$cm $=0.01$m,$l=2$m,$y=10$cm $=0.1$m と見積もる。

$$E=\frac{5mgl^3}{16\pi r^4 y}=\frac{250\cdot 9.8\cdot 2^3}{16\pi(0.01)^4 0.1}=120\times 10^{10}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2} \tag{9}$$

鋼鉄のヤング率よりやや大きい値となる。棒の半径が 4 乗で効くのでこの見積もりが結果を一桁以上変えることがある。

第四問（弾性体の波動）（配点 20(-2)）

弾性体中を伝わる縦波を考える。
まずは密度 ρ、断面積 S、ヤング率 E の棒を伝わる縦波を考える。

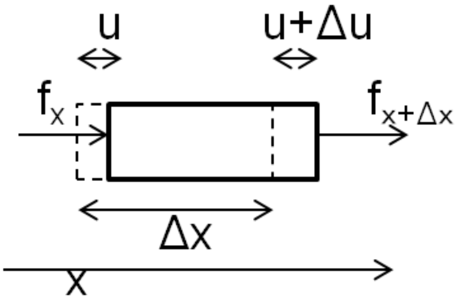

図 4: 第四問　1) 解答例

1) 以下の「」内の文章を図示せよ。但し、もともとの微小区間を破線、変形後の同区間を実線で書くこと。図中には $x, \Delta x, u, \Delta u, f_x$ を記入すること。「もともと、$(x \sim x + \Delta x)$ にあった微小部分が変形して、$(x + u \sim x + \Delta x + u + \Delta u)$ の位置に移ったする。この時のそれぞれの微小区間の両端での応力 f をとする。」

配点 4

採点基準 $x, \Delta x, u, \Delta u, f_x$ それぞれ 1 点。

解答例

図 4 の通り。 2) ヤング率の定義に従って、応力 f を E,$\Delta u, \Delta x$ を用いて表わせ。

配点 2

採点基準 正しくて 2 点。違っていても f と E の次元があっていれば部分点 1 点、$f \propto \frac{\Delta u}{\Delta x}$ なら部分点 1 点。

解答例

$f = E\frac{\Delta u}{\Delta x}$

3) 2) から得られる運動方程式を解くと式 (10) を得る。

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{10}$$

式 (10) 及び参考資料を用いて、適当な棒をたたいた時の縦波の速度を有効数字 2 桁で計算せよ。

。

配点 5

採点基準

ヤング率、密度を単位付きで拾えて部分点各 1 点。密度の単位変換で部分点 1 点。式に代入して部分点 1 点。計算 1 点。（明示なく式に入れて、密度変換なしは 2 点。）

解答例

鋼鉄を考える。ヤング率 $E = 20 \times 10^{10}[\mathrm{N \cdot m^{-2}}]$、密度 $\rho = 8.0[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}]$ を使う。

$\rho = 8.0[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}] = 8.0 \times 10^{-3} \times 10^{6}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}] = 8.0 \times 10^{3}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]$ なので、

$$= \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^{10}[\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^{-2}}]}{8.0 \times 10^{3}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^{6}}{8.0}[\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}]} = 5.0 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}] \tag{11}$$

アルミニウム　$5.0\times10^3[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$ ガラス　$4.4\sim5.6\times10^3[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$ ゴム　$2.2[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$
次に、固体中を進む縦波を考える。
4) 固体中に、(a,b,c) の大きさの直方体を考える。この時、縦波の進む方向 x には伸縮するが、横方向には伸縮しないとする。x 方向の歪み Δa は式 (12) として表される。

$$\Delta a=\frac{f_x}{E}a-\sigma\left(\frac{f_y}{E}+\frac{f_z}{E}\right)a \tag{12}$$

ここで σ はポアソン比である。式 (12) を参考にして、横方向（y 及び z 方向）に伸縮しないことを表す式を書け。
配点 3
採点基準 正しくて 3 点。$=0$ 抜けは 2 点。間違った式=0 は 1 点。
解答例

$$\Delta b=\frac{f_y}{E}b-\sigma\left(\frac{f_z}{E}+\frac{f_x}{E}\right)b=0 \tag{13}$$
$$\Delta c=\frac{f_z}{E}c-\sigma\left(\frac{f_x}{E}+\frac{f_y}{E}\right)c=0 \tag{14}$$

5)4) を解くと固体中を進む縦波の速さは

$$v'=\sqrt{\frac{k+\frac{4}{3}G}{\rho}} \tag{15}$$

と表される。ただし、

$$k=\frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{16}$$
$$G=\frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{17}$$

である。
棒中と固体中の縦波の速度の大小を比較せよ。配点 4
採点基準　v'/v や $v'-v$ などで比較しようとして部分点 2 点。計算 1 点。比較で「速い」1 点。
解答例

鋼鉄を考える。ポアソン比 $\sigma=0.3$ を使う。
式 (15)-(17) より

$$v'/v=\sqrt{\frac{k+\frac{4}{3}G}{\rho}}/\sqrt{E/\rho}=\sqrt{\frac{1}{3(1-2\sigma)}+\frac{4\cdot2}{3\cdot2(1+\sigma)}}=\sqrt{\frac{1}{3\cdot0.4}+\frac{2}{3\cdot1.3}}=\sqrt{1.346}>1 \tag{18}$$

よって $v'>v$
単純なモデルよりも実効的なヤング率が大きくなり、速度は 2 割程度速くなる。

アルミニウム　1.26 ガラス 1.06 ゴム　無限大
6) ヤング率 E、密度 ρ を次元テーブルに記入せよ。

配点 2
採点基準 (採点基準) 各 1 点。
解答例
表 1 の通り。

A　参考資料

必要に応じて以下の変数を用いること。

A.1　定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$

A.2　様々な物質の弾性定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.5	0.91-0.96