2014年度後期　物理学C2（木曜4限　担当：身内） 中間試験 解答例

2014年12月4日4限

準備でき次第試験開始 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。

第一問（次元）（配点5(+4)）

表1（次元テーブルと呼ぶ）を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。
速度 $\dot{x}(\equiv \frac{dx}{dt})$、加速度 $\ddot{x}(\equiv \frac{d^2x}{dt^2})$、運動量 $p(\equiv m\dot{x})$、力 $F(\equiv m\ddot{x})$、位置エネルギー $E_p(= mgx)$。
但し、[M] は質量、[T] は時間、[L] は長さの次元を表すものとする。

[M]=1

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1							
-2							

[M]=0

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1							
-2							

表 1: 次元テーブル

第二問（振動と波動）（配点20(-2)）

1) 質量 m の質点を摩擦の無視できる床上に置き、ばね定数 k のばねで垂直な壁に接続する。つり合いの位置から変位 u を与えた時の図を描け。図には原点、変位 u、質点、ばね、働く力（矢印）を記入すること。
また、このときの運動方程式を書け。
2) 1) の解答の運動方程式の解のうちのひとつは

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{1}$$

と書け、単振動をする。ω を k, m を用いて表せ。また、現実的な k, m を仮定して、単振動の周期 T を計算せよ。
3) 式 (1) の変位を持つ波をを考える。この波が $v > 0$ で $+x$ 方向に進む時の波の式 $u(x,t)$ を表せ。また、この式が波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ。
4) ばね定数 k、振動数 ω を次元テーブルに記入せよ。

第三問（弾性体のたわみ）（配点15）

図1左の写真の様な情況を、弾性体のモデルとして考える。

1) 棒を弾性体として考えることで、たわみを計算することができる。棒を適当な箇所 (中心を原点とした時の座標を x とする) で仮想的に切断することを考える。2分された棒のうちで、中心を含む部分の力のモーメントのつり合いを図1右に示す。ここで、M は仮想断面での弾性応力による回転モーメントで

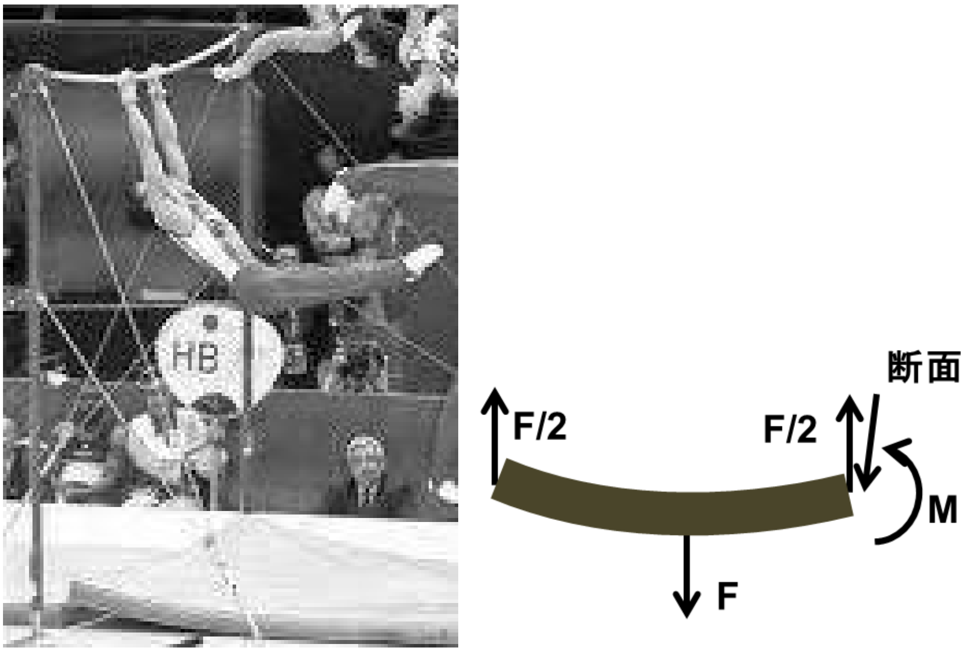

図 1: 鉄棒（左）。中心を含む部分の力、モーメントのつり合い（右）。

ある。図 1 右を参考にして、中心を含まない部分（棒の逆側）の力のモーメントのつり合いの図を描け。棒の質量は無視して良い。また、下向きの力は一点にかかっているとする。

2) 棒の長さを l としたときに、図 1 右の力のモーメントのつり合いは、$(l/2+x)\cdot\frac{F}{2}-x\cdot F-M=0$ と書ける。ここで、断面を回転の中心とし、右回りの回転を正とした。また、棒の中心を原点として、棒に沿って x 軸をとった。1) で考えた、中心を含む部分の力のモーメントのつり合いの式を書け。

3) 2) を解き、適当な数学的近似を加えると、たわみが

$$y=\frac{mgl^3}{16\pi r^4 E} \tag{2}$$

として与えられる。ここで y は $x=0$ でのたわみの大きさ、r は棒の半径、g は重量加速度、E は棒のヤング率である。ここで、$F=5mg$ は説明なしに用いてよい。写真などから、m,r,l,y に適当な数値を見積もって代入して、E を有効数字 1 桁で求めよ。この計算結果と参考資料の値をを比較して、モデル及び代入した数値の妥当性について論ぜよ。

第四問（弾性体の波動）（配点 20(-2)）

弾性体中を伝わる縦波を考える。
まずは密度 ρ、断面積 S、ヤング率 E の棒を伝わる縦波を考える。
1) 以下の「」内の文章を図示せよ。但し、もともとの微小区間を破線、変形後の同区間を実線で書くこと。図中には $x,\Delta x,u,\Delta u,f_x$ を記入すること。「もともと、$(x\sim x+\Delta x)$ にあった微小部分が変形して、$(x+u\sim x+\Delta x+u+\Delta u)$ の位置に移ったする。この時のそれぞれの微小区間の両端での応力 f をとする。」

2) ヤング率の定義に従って、応力 f を E,$\Delta u,\Delta x$ を用いて表わせ。

3) 2) から得られる運動方程式を解くと式 (3) を得る。

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3}$$

式 (3) 及び参考資料を用いて、適当な棒をたたいた時の縦波の速度を有効数字 2 桁で計算せよ。
。

次に、固体中を進む縦波を考える。
4) 固体中に、(a, b, c) の大きさの直方体を考える。この時、縦波の進む方向 x には伸縮するが、横方向には伸縮しないとする。x 方向の歪み Δa は式 (4) として表される。

$$\Delta a = \frac{f_x}{E}a - \sigma\left(\frac{f_y}{E} + \frac{f_z}{E}\right)a \tag{4}$$

ここで σ はポアソン比である。式 (4) を参考にして、横方向（y 及び z 方向）に伸縮しないことを表す式を書け。
5)4) を解くと固体中を進む縦波の速さは

$$v' = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \tag{5}$$

と表される。ただし、

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{6}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{7}$$

である。
棒中と固体中の縦波の速度の大小を比較せよ。
6) ヤング率 E、密度 ρ を次元テーブルに記入せよ。

A 参考資料

必要に応じて以下の変数を用いること。

A.1 定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

A.2 様々な物質の弾性定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.5	0.91-0.96