物理実験学 I　中間試験（90 分）

解答例

身内　　2013/05/31

注意事項　　ノート、プリントなど、持ち込み可
関数電卓使用可
試験中のコミュニケーション・ネットへの接続不可

満点 30 点

I (統計の基礎概念）（配点 12)

正 20 面体さいころの各面に“1”～“4”までの数字が、目の数の 2 倍の面数ずつ（1 は 2 面、2 は 4 面、3 は 6 面、4 は 8 面）ふってあり、各面が出る確率はどれも等しいとする。

(1) このさいころをふったときの期待値と分散を求めなさい

（解）期待値　(1×2+2×4+3×6+4×8)/20=3　(2 点)

分散　(4×2+1×4+0×6+1×8)/20=1　(2 点)

(2) このさいころを 100 個ふったとき、その目の平均値（100 個ののさいころの目の和÷100）の期待値と分散を求めなさい

（解）平均値の期待値　3　(2 点)

平均値の分散　1/100　=　0.01　(2 点)

(1)が違っていてもここのロジックが正しければ加点。）

(3) このさいころを 100 個ふったとき、“3”の目のでたさいころの数の期待値と分散を求めなさい

（解）これは B(n=100,p=0.3)のベルヌーイ試行

よって、$\langle X \rangle = np = 30$　(2 点)

分散は $\sigma^2 = np(1-p)$=100×0.3×0.7=21　(2 点)

II（ポアソン分布）(配点 12)

右図のようなパズルを考える。（パズルのルールをしらなくても解答には支障ない。）このパズルで問題となるコンボ数 N_{COMBO} は以下の式で与えられる。

$N_{COMBO}=N_M+N_A$

ここで、N_M はプレーヤーが与える値、N_A は偶然決まる値である。N_A のそれぞれの事象は確率的に起こり、独立であると考えることにする。今、確率計算で N_A の期待値が 0.4 であるということを計算で求めた。

(1) N_M はどのよう分布関数に従うか説明せよ。

（解）

μ=0.4 のポアソン分布に従う。　　　　　（ポアソン 1 点 μ=0.4　1 点　ただし次問以降で 0.4 が使えていればここで明記しなくても加点。）

(2) N_A =10 となる確率を計算せよ。

（解）

$P(10,0.4) = \frac{0.4^{10}}{10!} e^{-0.4} = \frac{1.049\times10^{-4}}{3.6\times10^{6}} \times \ 0.67 = 1.94 \times 10^{-11}$　　　　（2 点）

(3) N_A を横軸、縦軸にその確率をとったグラフを書け。横軸は 0 から 5 までとること。

（解）

$P(0,0.4)$ =0.6703

$P(1,0.4)$=0.2681

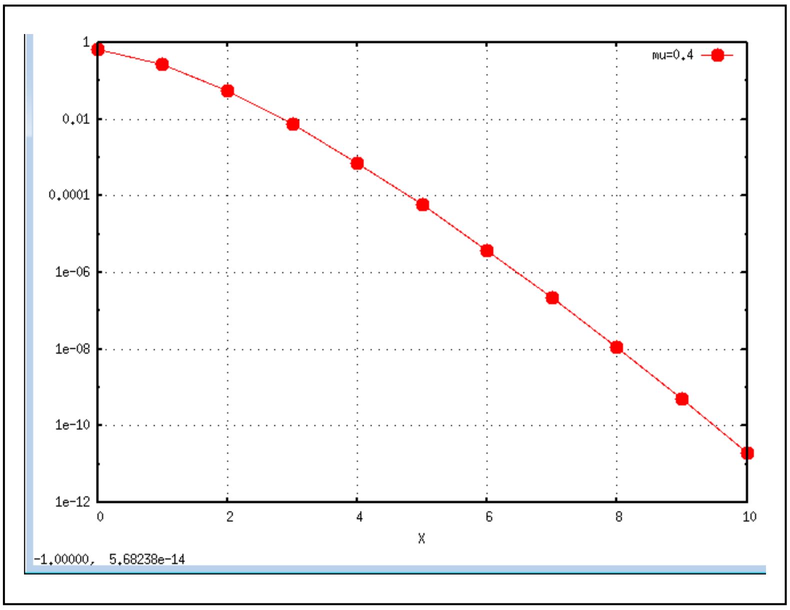
$P(2,0.4)$ =0.0536

$P(3,0.4)=7.15\times10^{-3}$

$P(4,0.4)=7.15\times10^{-4}$

$P(5,0.4)=5.7\times10^{-5}$

右図の 0-5 の部分。



（計算　2 点　グラフ 2 点）

(4) 10 回の試行を行って $N_A \geqq 5$ が一度も起こらない確率を求めよ。

（解）1 回の試行で $N_A \geqq 5$ とならない確率は　$P(0,0.4) + P(1,0.4) + P(2,0.4) + P(3,0.4) + P(4,0.4)) = 0.9999$

（ここまでで部分点 1 点）

10 回の試行では$0.9999^{10} = 0.999$　（2 点）

(5) (3)のグラフと比べて、N_{COMBO} =5 の確率を増やすためにはどうしたらよいか、二つ答えよ。

（解）　N_M を大きくする。　N_{COMBO} の期待値を大きくする。

（「試行回数を増やす」は期待値は変わらないので NG）

（各 1 点　計 2 点）

Ⅲ（推定、検定）（配点 6）

51 人の学生に試験を行うことを考える。得点分布が正規分布に従うものとして以下の問に答えなさい。

(1) 平均点が 40 点、標準偏差が 5 点の問題を作った時、30 点未満をとる学生の人数の期待値を求めよ。

（解）

(40-30)/5=2　2σ での正規分布の危険値はα=0.045（これが拾えて部分点 1 点）

片側についてはα/2 なので、

51×0.045/2=1.14　（答）1.1 人　　　（2 点）

実際に試験を行ったところ、30 点未満の学生が 5 人出て、
各学生の点数を　$X_1 \cdots X_N$ とした時、

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = 42.1$$

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(\bar{X} - X_i) = 26.8$$

$$\mathrm{N} = 51$$

という結果を得た。「お前の試験は難しすぎる」というクレームに対して、以下の 2 点で検定を行え。以下の計算では、真の分散として不偏分散を使用してよい。

（2）平均点の真の値が 40 になっていないという仮説を 90%の信頼度で検定せよ。

（解）中心極限定理より標本平均は$(\bar{X}, \sigma^2/N)$の正規分布に従う。

ここで　$\bar{\mathrm{Z}} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{N}} = \frac{42.1-40}{\sqrt{26.8}/\sqrt{51}} = \frac{2.1}{0.72} = 2.89 > 1.64$　　　(式立てて部分点 1 点)

なので 90%信頼度で、「平均値の真の値が 40 点になっていない」という仮説は棄却されない(結論に部分点 1 点)。

40 点か否か、の 2 つのみに対する検定なので、「平均値の真の値は 40 点ではない」という結論も可とする。

(3) 標準偏差の真の値が 5 点でないという仮説を 90%の信頼度で検定せよ。

(解)

不偏分散 S について、$\chi^2 \equiv \frac{(N-1)S^2}{\sigma^2}$　が成り立つ。(ここで部分点 1 点)

よって、reduced χ^2を計算すると、　$\frac{\chi^2}{N-1} \equiv \frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{26.8}{5^2} = 1.07$となる。

自由度 50 のχ^2　分布について、90%信頼区間は　$S_1=0.69<1.07<1.44= S_2$　となる。
したがって「標準偏差の真の値が 5 点以上である」という仮説は棄却される。(結論に部分点 1 点)

V（その他）

本講義に対する、意見、要望などを書いてください。建設的な意見には満点を超えない範囲で若干の加点します。