

2013年度 物理学C2 (1年生対象)  
講義メモver20140123  
(身内賢太郎+川越清以)



講義担当教員: 身内賢太郎  
物理・粒子物理研究室  
自然3号館317号室  
TEL 078-803-5637  
[miuchi@panda.kobe-u.ac.jp](mailto:miuchi@panda.kobe-u.ac.jp)

本講義メモは <http://ppwww.phys.sci.kobe-u.ac.jp/~miuchi/>  
に改訂します。

指定教科書: 基礎物理学 I (協立出版)  
スケジュール

講	ページ	日付	タイトル	主な内容
01	3	2013/10/3	振動と波動1	ガイダンス・単振動・減衰運動
02	10	2013/10/10	振動と波動2	振動の合成・波動・波の性質
03	17	2013/10/17	振動と波動3	波動方程式・波の速度
04	23	2013/10/24	振動と波動4	波のエネルギー・反射と透過・定在波
		2013/10/31	休講	
05	31	2013/11/7	連続体1	弾性体の定義・定数の定義、関係式
06	35	2013/11/14	連続体2	たわみ・ねじれ
07	41	2013/11/21	連続体3	弾性のエネルギー・弾性波
08	48	2013/11/28	流体1	流体・完全流体
09		2013/12/5	中間試験	
10	60	2013/12/12	流体2	粘性流体
11	65	2013/12/19	熱力学1	気体の分子運動論
12	68	2014/1/9	熱力学2	熱力学第一法則
13	74	2014/1/16	熱力学3	カルノーサイクル
14	79	2014/1/23	熱力学4	熱力学第二法則・エントロピー
15		2014/1/30	期末試験	

- 本講義のめざすところ(物理を専門としない学生の為の物理)
  - 文字で説明された物理現象を図にする
  - 図から方程式(主に運動方程式)を立てる
  - (方程式を解く:ここはそれほど重視しない。試験でも。)
  - 得られた式に含まれる変数への依存を考慮する。グラフは良い手段。
  - 得られた解に現実的な数値を入れて計算する

を通じて、物理「使えるじゃん」と思ってもらおう。

- 本講義ノート 特に「まとめ地図」を見ながら  
「上から目線」で物理を見てやってください。
- ♠マークは授業では扱いません。発展内容として自宅学習等に役立ててください。

- 改訂log

- 20131003 初稿
- 20131017 第4講まで改訂
- 20131024 第5講まで改訂
- 20131114 第6講まで改訂
- 20131121 図2.3.3 修正
- 20131122 図2.3.3 例題7-1 修正
- 20131211 図2.3.3 例題7-1 修正

・高校物理の復習(補足参照)

・次元

– 一般の物理量は基本単位(質量M 長さL 時間T)のべきを用いて表わされる。

$$A=L^{[L]}M^{[M]}T^{[T]}$$

– このべきを次元と呼ぶ。

次元テーブル

[M]=1	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0	ρ(密度)		σ(線密度)				
-1					運動量		
-2			応力 ヤング率	k(ばね定数)	力	エネルギー	

[M]=0	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0					x	S	V
-1				ω γ	v		
-2					a		

\*



でだしの式



途中の大事な式



行きつく式

「教科書」=「基礎物理学I」 後藤憲一他編。

## <<第1講>>

# 第1章 振動と波動

緑⇒赤の変形よりも赤の式を解釈する、使い倒すことに重点を置きたい

## 1.1 単振動と減衰振動

### 1.1.1 単振動

(教科書95ページに至るまで。)

質量  $m$  の粒子のバネの力  $-kx$  による 1次元の運動を考える。 $x$  はバネの自然長からの変位。 $k$  はバネ定数。

図1.1.1参照

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.1.1}$$

この方程式の独立な解は  $x = e^{\alpha t}$  とおくことで求められる。

$$(\alpha^2 + k/m)x = 0 \tag{1.1.2}$$

すなわち  $x = e^{\pm i\omega t}$   $\omega = \sqrt{k/m}$  が独立な解である。オイラーの公式  
(1.2.1)  $\omega$ : 振動数 この先よく出て来るパラメータ

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \tag{1.1.3}$$

を用いて、実数の解を求めると、次のようになる。

$\omega t$  の次元が [rad]

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos \omega t \\ x_2(t) &= \sin \omega t \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

一般解は、独立な解の線形結合であり、

$$\begin{aligned} x &= Ax_1(t) + Bx_2(t) \\ &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ &= C \cos(\omega t + \phi_0) \\ &= D \sin(\omega t + \psi_0) \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

味わう:  $D, \psi, \omega$  などの次元  
絵を書いてみる。  $x=f(t)$

単振動は「正弦波」  
「振幅」と「位相」が性質を決める。  
(=2つのフリーパラメータ)

と書ける。一般解はいろいろな書き方があるが、必ず二個の積分定数を含む。この積分定数は、初期条件で決定できる。

周期  $T[s]$  と  $\omega$  の間には(1.1.6)の関係がある。

$$2\pi = \omega T \tag{1.1.6}$$

## 1.1.2 減衰振動

「ダンパー」、「ショックアブソーバー」など。  
速度に比例する「運動を止める力」が働く。

単振動について、速度に比例する力 $-\gamma\dot{x}$ が働く場合を考える。運動方程式は

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx \quad (1.1.9)$$

単振動の時と同様に(1.1.10)とおく。

$$x = e^{\alpha t} \quad (1.1.10)$$

(1.1.9)と(1.1.10) から

$$(\alpha^2 + \gamma\alpha/m + k/m)x = 0 \quad (1.1.11)$$

$\alpha$ に関する2次方程式(1.1.11)の判別式が負の時、すなわち

$$D = (\gamma/m)^2 - 4k/m < 0 \quad (1.1.12)$$

の時減衰振動となる。 $\alpha$ および $\omega$ は(1.1.13) (1.1.14)として表される。

$$\alpha = \frac{-\gamma/m \pm i\sqrt{-D}}{2} = -\gamma/2m \pm i\omega \quad (1.1.13)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{-D}}{2} = \sqrt{\frac{k}{m} - (\gamma/2m)^2} \quad (1.1.14)$$

独立な解は(1.1.15)(1.1.16)、一般な解は(1.1.17)~ (1.1.19)として表される。

$$x_1(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.1.15)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \sin(\omega t + \psi_0) \quad (1.1.16)$$

$$x = e^{-\gamma t/2m} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (1.1.17)$$

$$= C e^{-\gamma t/2m} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (1.1.18)$$

$$= D e^{-\gamma t/2m} \sin(\omega t + \psi_0) \quad (1.1.19)$$

(1.1.19)式を味わう: (1.1.5)式との比較や $\gamma$   
の次元を解析してみる。 など

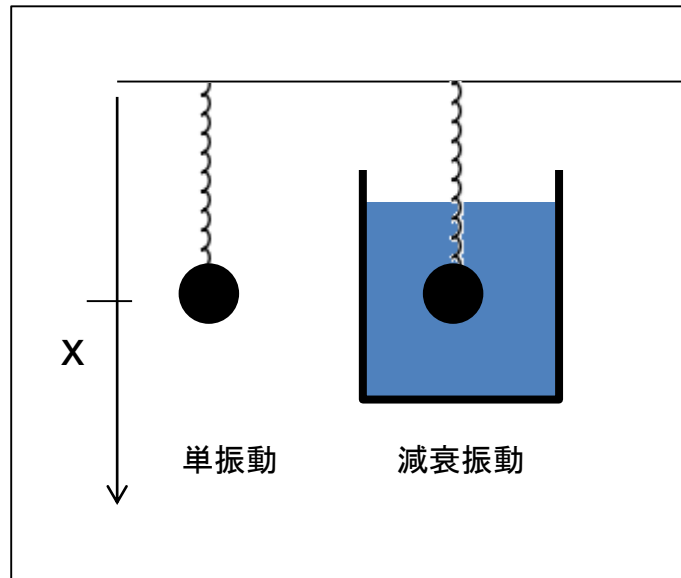


図1.1.3 単振動と減衰振動のモデル

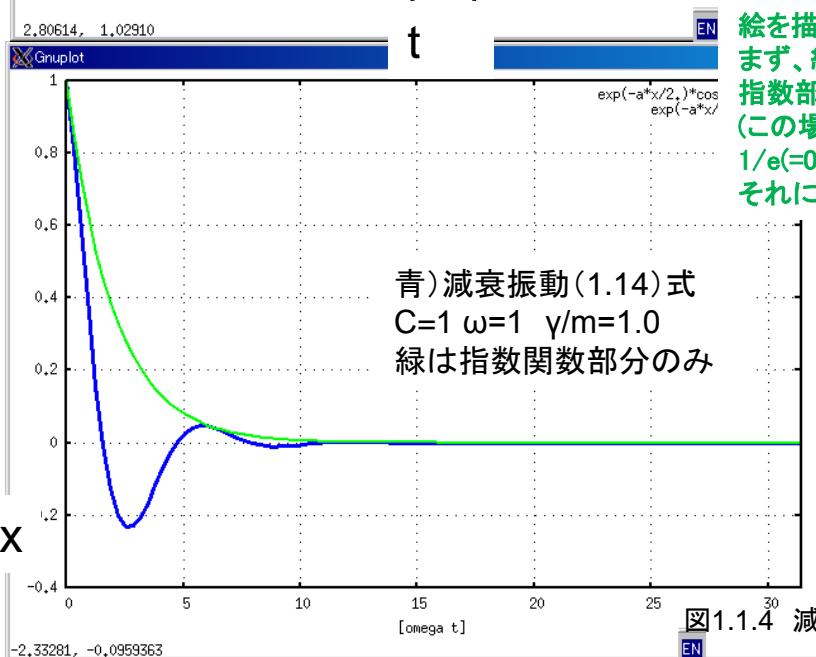
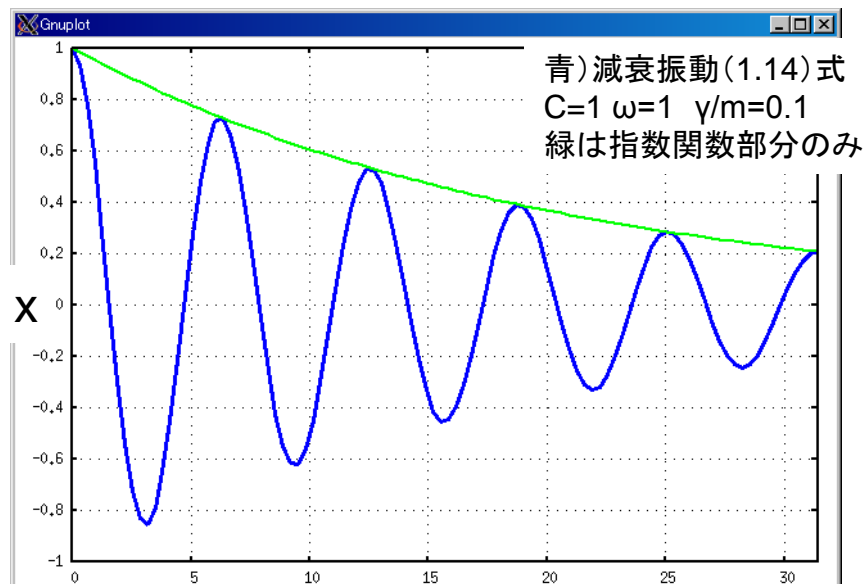


図1.1.4 減衰振動の時間変化

単振動 1.6式  
 $C=1 \omega=1$

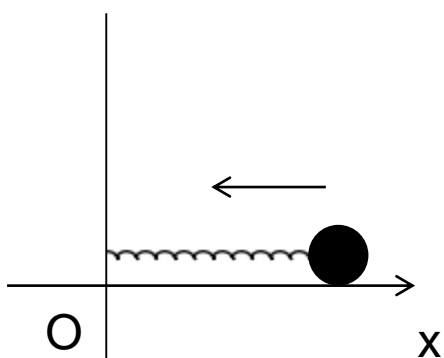


図1.1.1 単振動のモデル

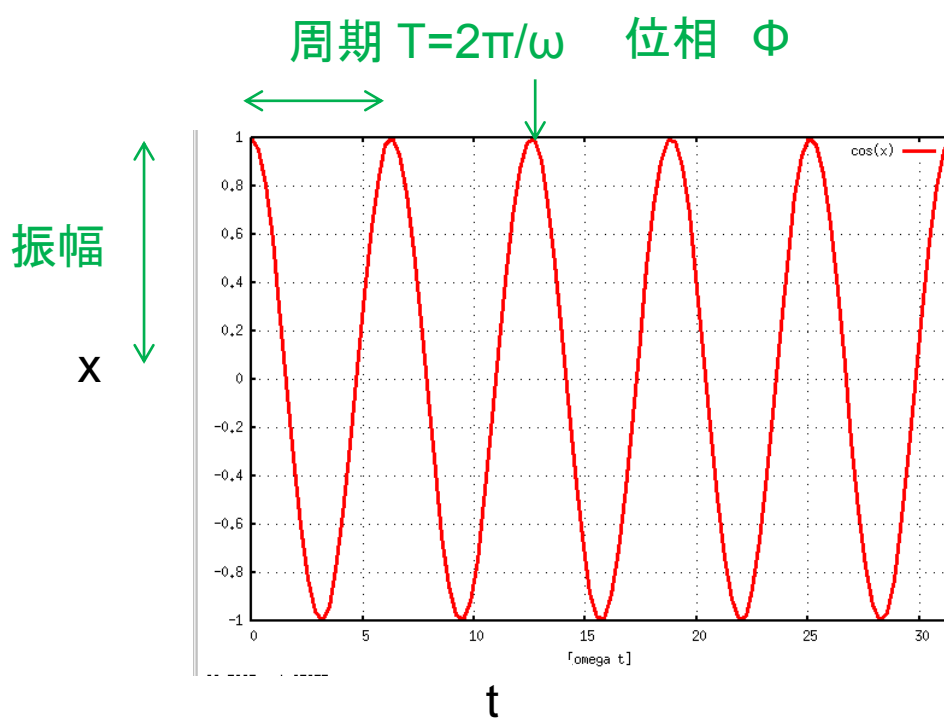


図1.1.2 単振動のパラメータ



例題1-1 堅めのばねと柔らかめのばねに適なおもりをぶら下げた時の振動周期を求めよ。(1.1.1章)

(解答例)10cm伸ばすのに 10kg 必要なら堅く、100gですめばやわらかい、と考えよう。それぞれに100g、1kg、10kgのおもりをぶら下げた時の振動数を考えることにする。

まず、それぞれのばねのばね定数 $k_i$ を考えると、仮定したおもりの質量 $m_i$ を用いて  $k_i = m_i g / x$  とあらわされる。

ここで(1.1.1)を使った。ただし、 $g$ は重力定数、 $x=0.1m$ は伸びの大きさを表す。

$$(1.2.1)より \omega = \sqrt{\frac{k}{M_j}} = \sqrt{\frac{m_i g}{M_j x}}$$

実際に数値を代入する。例として、 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $x = 0.1m$ ,  $m_i = 0.1kg$ ,  $M_j = 0.1kg$  を代入すると  $\omega = \sqrt{98} [s^{-1}] = 10 [s^{-1}]$   $T = 2\pi / \omega$  より  $T = 0.6$  秒くらいになる。同様に、他のおもりについても計算した結果を表1.1.1に示す。

	おもり M=100g	おもり M=1kg	おもり M= 10kg
堅いばね (m=10kg,x=10cm)	0.06秒	0.2秒	0.6秒
やわらばね (m=100g,x=10cm)	0.6秒	2秒	6秒

表1.1.1 振動の周期

例題1-2 水中から撮影した写真で、空気中の様子が見えていない時、見上げる角度の範囲を推定せよ。(1.1.2章)

(解答例)図1.1.4の様な状況を考える。屈折の式  $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$  で  $\theta_1 = \pi/2$  となる時大きい $\theta_2$ をとると、屈折は不可能となり、水中からの撮影で空気中の様子は見えない。

$\sin\theta_2 > \frac{n_1}{n_2} \sin \frac{\pi}{2} = 0.75$  よって  $\theta_2 > 49$ 度 (臨界角)

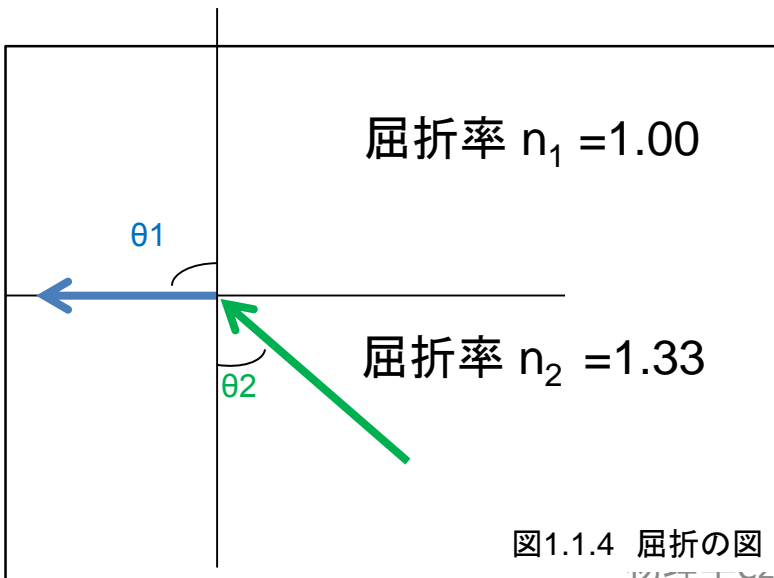


図1.1.4 屈折の図

例題1-4 振り子の運動を論ぜよ。

(解答例) 振れ角が $\theta$ の時の運動方程式を考える。

運動の加速度 $a = l\ddot{\theta}$

糸に垂直向きに働く力  $mg\sin\theta \sim mg\theta$  ( $\theta \ll 1$ より)

より  $ml\ddot{\theta} = -mg\theta$   $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$

(1.1.1)式と見比べると $\omega = \sqrt{g/l}$ を得る。

したがって、周期 $T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{l/g}$ の単振動を行う。周期は $ml$ によらない！

(発展) 上記結果を使って

[http://www.youtube.com/watch?v=yVkdJ9PkRQ&feature=player\\_embedded](http://www.youtube.com/watch?v=yVkdJ9PkRQ&feature=player_embedded)  
を考えてみよう

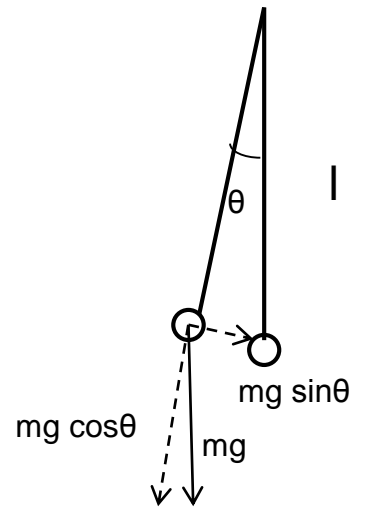
60秒のあたりに51周期( $T=50/51$ 秒)~65周期( $T=60/65$ 秒)まで

一周刻みで15個の振り子を準備することで上記の運動を得られる。

周期1秒の振り子の長さは

$T = 1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{l/g}$  より  $l = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 g = 0.24[\text{m}]$  となる。

ちなみに周期59/60秒では、0.23m となる。



## 1.2 振動の合成とうなり

(教科書96ページ～)

一般的に振動の合成を考える。

$$x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (1.2.1)$$

$$x_2 = a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (1.2.2)$$

$$x = x_1 + x_2 \quad (1.2.4)$$
$$= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

1.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  のとき、

加法定理

$$x = a_1(\sin \omega t \cos \phi_1 + \cos \omega t \sin \phi_1) + a_2(\sin \omega t \cos \phi_2 + \cos \omega t \sin \phi_2)$$
$$= (a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2) \sin \omega t + (a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2) \cos \omega t$$
$$= a \sin(\omega t + \phi) \quad (1.2.5)$$

なんてことはない。位相が変わるだけ。

となる。ここで、

$$a^2 = (a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2)^2 + (a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2)^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (1.2.6)$$

$$\tan \phi = \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2} \quad (1.2.7)$$

2.  $\omega_1 \sim \omega_2$  のとき。簡単のため、 $a_1 = a_2 = a$  の場合を考えると、

$$x = a \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$= 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (1.2.8)$$

教科書 図5-2

ここで、

$$\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (1.2.9)$$

であることに注意すると、振動の振幅がゆっくりと角速度  $|\omega_1 - \omega_2|/2$  で変化していくことがわかる。これをうなりと言う。もとの振動の振動数をそれぞれ  $\nu_1 = \omega_1/2\pi, \nu_2 = \omega_2/2\pi$  とすると、うなり回数(山と谷の回数)は次のようになる。

こういった解釈が重要

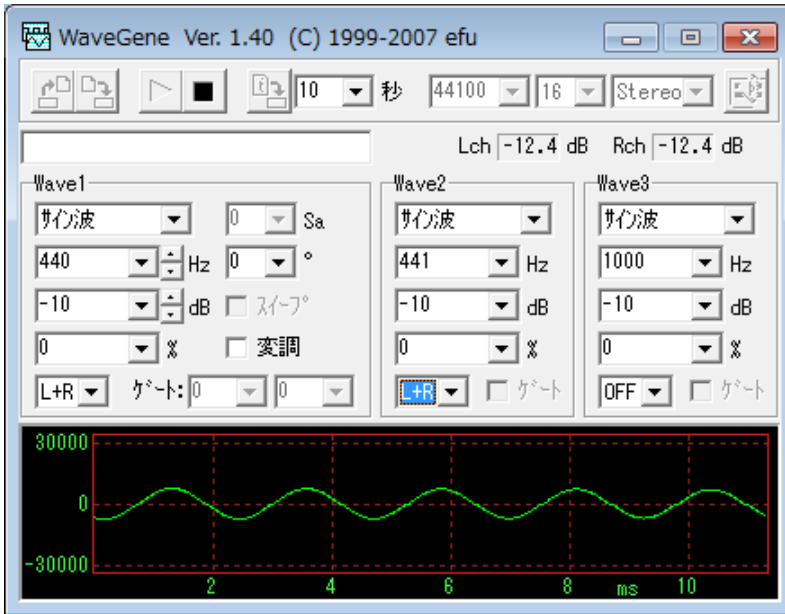
$$\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| / \pi = |\nu_1 - \nu_2| \quad (1.2.10)$$

cosの項の山から山までは  $\pi (= (\omega_1 - \omega_2) t_0 / 2)$  ここでうなりの周期を  $t_0$  とした。うなりの回数(=  $1/t_0$  としてあらわされるので) (1.50)を得る。

\*

• うならせてみよう

– 440Hzと441Hzはどう唸るか



音の周波数(理科年表)	
C	261.63 Hz
C#	277.18 Hz
D	293.66 Hz
D#	311.13 Hz
E	329.63 Hz
F	349.23 Hz
F#	369.99 Hz
G	392.00 Hz
G#	415.30 Hz
A	440.00 Hz
A#	466.16 Hz
H	493.88 Hz
C	523.25 Hz

図1.2.1 wavegene 実行画面

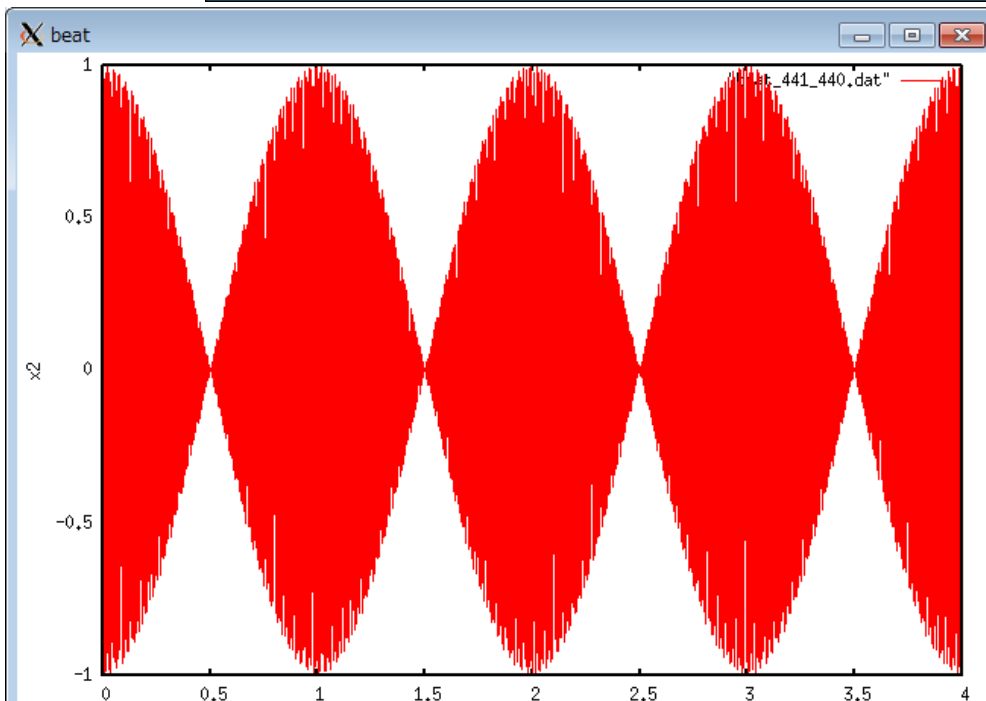


図1.2.2 440Hzと441Hzの唸り  
(長い目で見ると)

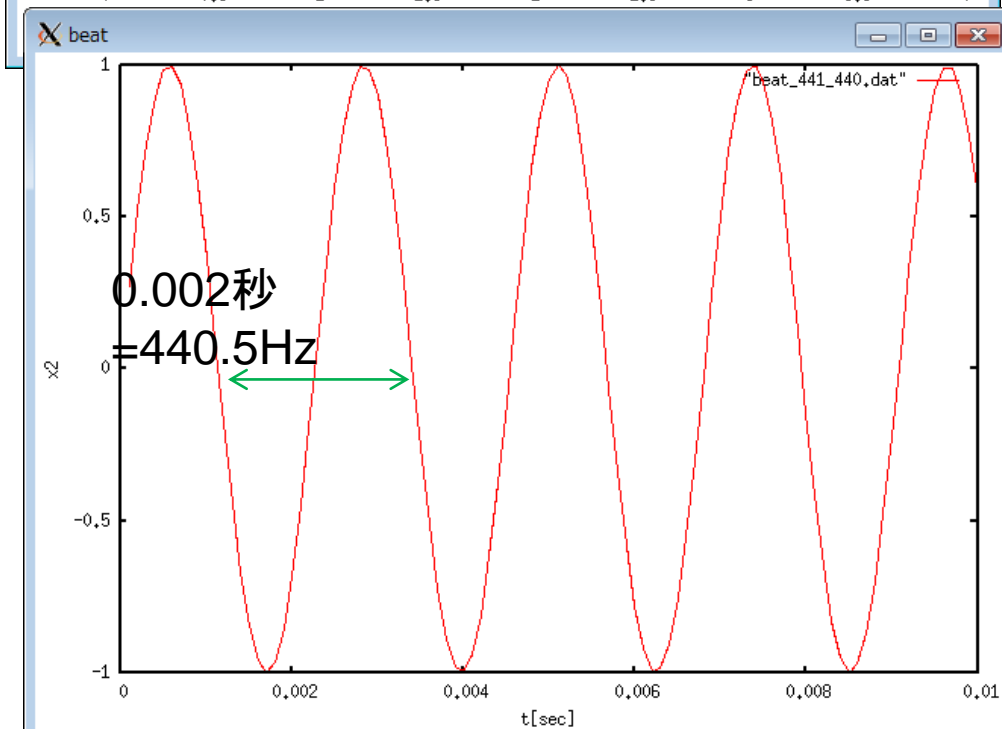


図1.2.3 440Hzと441Hzの唸り  
(拡大図)

### 1.3 連成振動 ♠

(授業では省略)

二個の質量  $m$  の粒子が 3 つのばねで両側の壁とつながれている。運動方程式は次の通り。

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) & (1.3.1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_1x_2 & (1.3.2) \end{aligned}$$

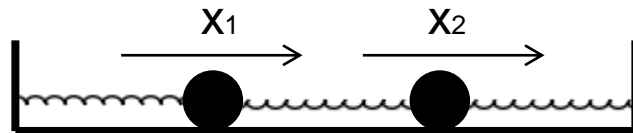


図1.3.1 連成振動のモデル

これらの式の和と差をとると、

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_1(x_1 + x_2) \quad (1.3.3)$$

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(k_1 + 2k_2)(x_2 - x_1) \quad (1.3.4)$$

ここで  $u_1 = x_1 + x_2$ ,  $u_2 = x_2 - x_1$  と置き換えると、

$$m\ddot{u}_1 = -k_1u_1 \quad (1.3.5)$$

$$m\ddot{u}_2 = -(k_1 + 2k_2)u_2 \quad (1.3.6)$$

振動数の大きい方を  $\omega_2$ 、小さい方を  $\omega_1$  とおいた。

よって、 $\omega_1^2 = k_1/m$ ,  $\omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/2 > \omega_1^2$  として、基準振動が求まる。

$$u_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad (1.3.7)$$

$$u_2 = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \quad (1.3.8)$$

元の振動の解は、ふたつの基準振動の重ね合わせになる。

$$\begin{aligned} x_1 &= (u_1 - u_2)/2 \\ &= (A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2))/2 \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

4つのフリーパラメータ

$$\begin{aligned} x_2 &= (u_1 + u_2)/2 \\ &= (A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2))/2 \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

以下「味わう」

初期条件として  $x_1 = a > 0, x_2 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$  をとると、

$$(A_1 \sin \phi_1 - A_2 \sin \phi_2)/2 = a \quad (1.3.11)$$

$$(A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2)/2 = 0 \quad (1.3.12)$$

$$(A_1 \omega_1 \cos \phi_1 - A_2 \omega_2 \cos \phi_2)/2 = 0 \quad (1.3.13)$$

$$(A_1 \omega_1 \cos \phi_1 + A_2 \omega_2 \cos \phi_2)/2 = 0 \quad (1.3.14)$$

から

$$A_1 \sin \phi_1 = -A_2 \sin \phi_2 = a \quad (1.3.15)$$

$$A_1 \omega_1 \cos \phi_1 = A_2 \omega_2 \cos \phi_2 = 0 \quad (1.3.16)$$

となり、 $A_1 = a, A_2 = -a$  および  $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$  が得られる。よって、この初期条件に対する解は次のようになる。

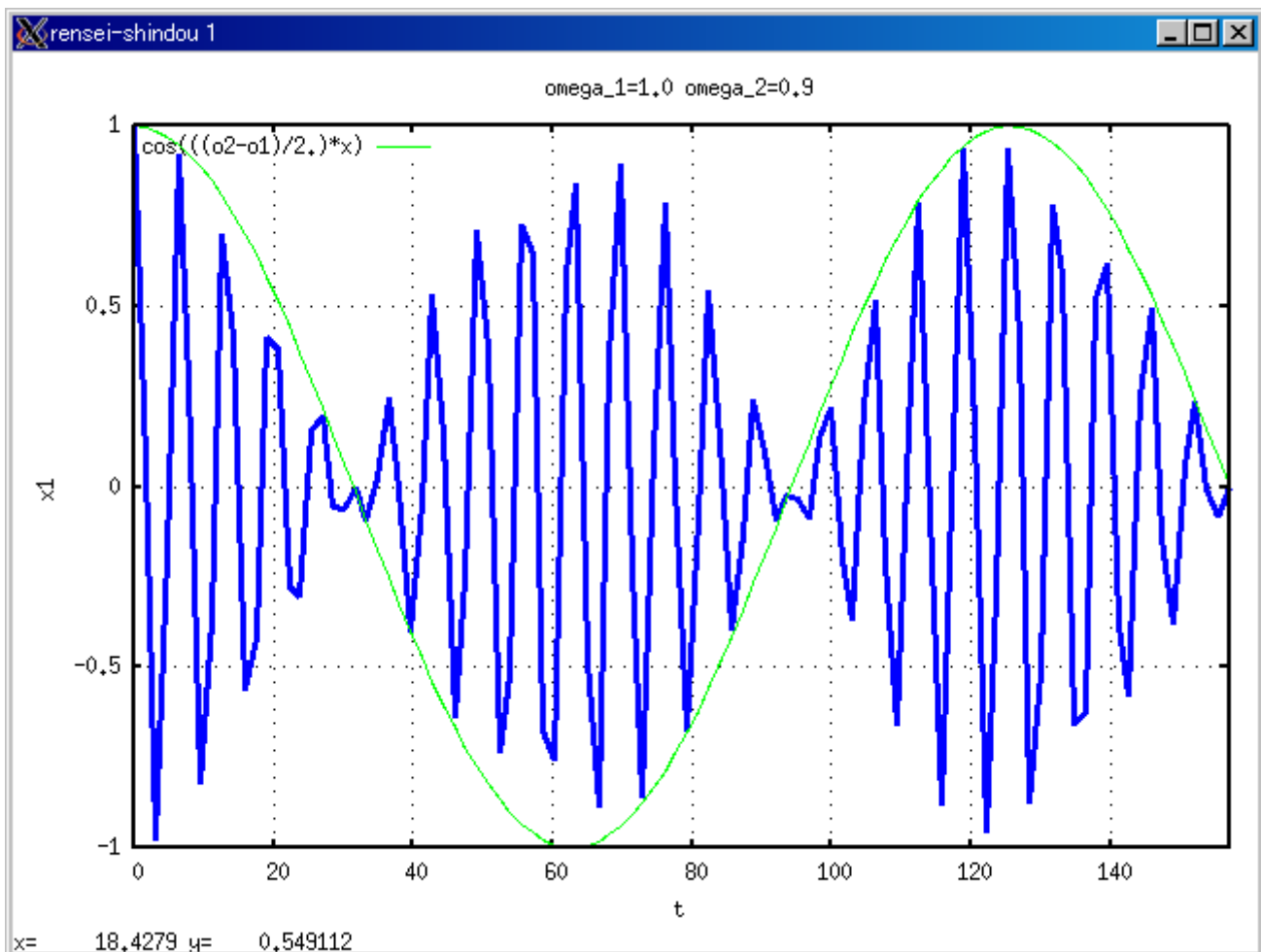
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t \\ \cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t \end{pmatrix} \quad (1.3.17)$$

$$= a \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t) \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \\ \sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t) \sin(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \end{pmatrix} \quad (1.3.18)$$

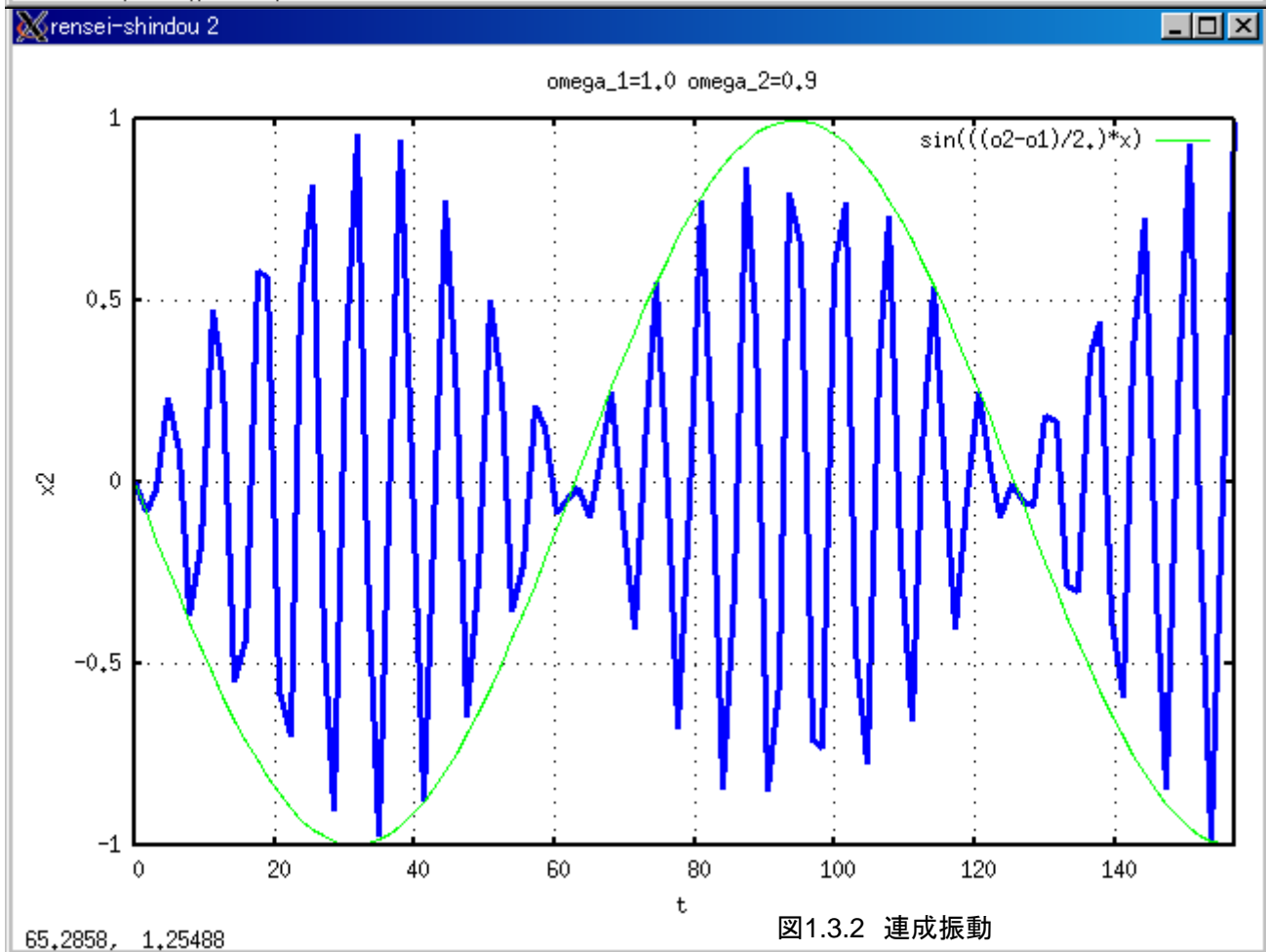
$k_2$  が  $k_1$  に比べて小さいとき、 $(\omega_1 + \omega_2)/2 \gg (\omega_2 - \omega_1)/2$  である。 $x_1, x_2$  の振幅の大きさが角速度  $(\omega_2 - \omega_1)/2$  でゆっくりとそれぞれ振動し、 $x_1 \leftrightarrow x_2$  で交互に入れ替わっている。

最後の部分は加法定理(0.2.2~0.2.5)を使った。

結果の式を見ても何も面白くない。  
次ページの絵を参照。



$x = 18.4279$   $y = 0.549112$



65.2858, 1.25488

图1.3.2 連成振動

## 1.4 波の諸性質

### 1.4.1 ドップラー効果

波が空間を伝わる時、波源や観測者が運動していると、波の振動数が変化して観測される。

$$\nu' = \frac{v - v_O}{v - v_S} \nu \quad (1.4.1)$$

$\nu'$  は観測者から見た波の周波数、 $\nu$  は観測者も波源も静止しているときの周波数である。また、 $v$  は波の速さ、 $v_O$  は観測者の速度、 $v_S$  は波源の速度である。

- 観測者と波源が静止しているときの波長、周波数、早さの関係は

$$v = \lambda \nu \quad (1.4.2)$$

- 波源が静止しているときの波長を  $\lambda$  とすると、波源の前方では波長が  $(v - v_S)/v$  倍になる。

$$\lambda' = \lambda(v - v_S)/v \quad (1.4.3)$$

- 観測者が運動していると、観測者に対する波の相対速度は

$$v' = v - v_O \quad (1.4.4)$$

- よって、観測者から見た周波数は

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v - v_O}{v - v_S} \frac{v}{\lambda} = \frac{v - v_O}{v - v_S} \nu \quad (1.4.5)$$

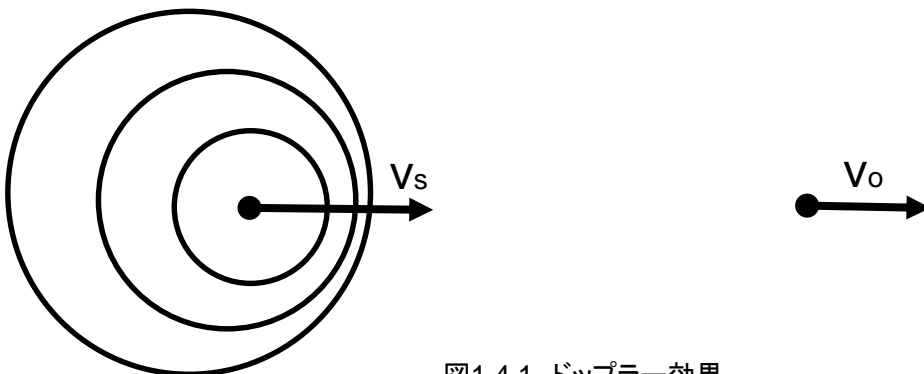


図1.4.1 ドップラー効果



## 1.4.2 ホイヘンスの原理

(教科書111ページ～)

ある瞬間に波面の各点から球面波(素元波)がでてその媒質における速さで広がると考え、波の進む前方で、それらに共通に接する面(包絡面)が次の瞬間の波面になる。

### 回折

波が物体にあたると、その蔭になるところまで波が回り込む。また、隙間をあけた板に当てると、隙間を通り抜けて板の蔭にあたるところまで波が回り込む。この現象を回折と言い、ホイヘンスの原理から説明される。隙間の大きさが波長に比べて小さいほどこの現象が目立つ。

(1.1.8)

屈折率(理科年表)	
空気	1.00
水	1.33
ガラス	1.45

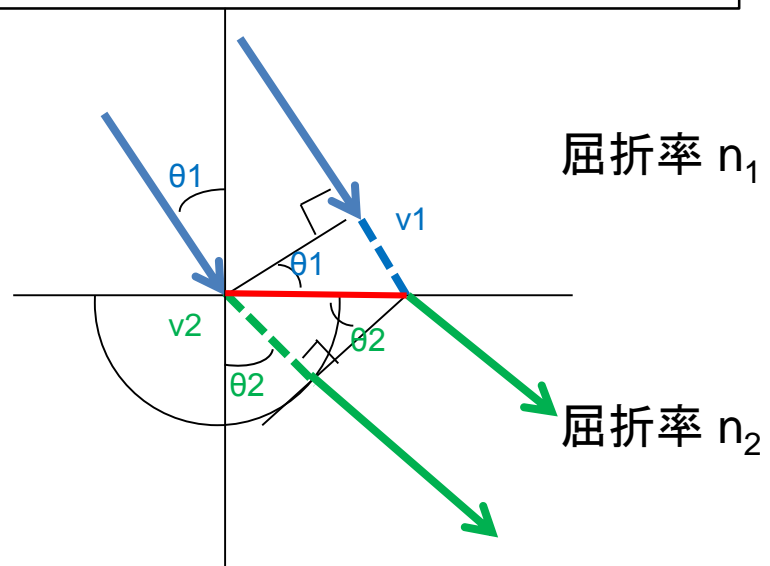


図1.1.3 ホイヘンスの原理と屈折の法則

反射  $\theta_1$  (入射角) =  $\theta'_1$  (反射角) (1.1.7)

屈折 媒質1(波の速さ $v_1=c/n_1$   $n_1$ は「屈折率」)から媒質2(波の速さ $v_2=c/n_2$ )への入射を考える。図の赤線部を考えることで、入射角 $\theta_1$ 、屈折角 $\theta_2$ の間に(1.14)式が成り立つ。 $n_1 > n_2$ の時、媒質2に侵入不能な $\theta_1$ がある。

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.1.8)$$

例題2-1 441Hzの音と440Hzの音を同時にならすとどういった現象が起こるか(1.2章)

(解答例) 440.5Hzの音が周期1秒で唸るのが聞こえる。

例題2-2 救急車の音を定量的に説明せよ。(1.4章)

(解答例) サイレンの周波数を $f$ 、速度を $v$ とすると、聞こえる音の周波数は

$$v' = \frac{v}{v - v_s} v$$

音速 $v=340\text{m/s}$  救急車の時速 $\pm 40\text{km/h}(=40 \times 1000/3600=11)$ を代入すると、

正号、つまり近づいてくる時  $v' = 1.03v$

負号、つまり遠ざかる時  $v' = 0.96v$

サイレンの周波数960Hzをとすると、近づいてくるとき989Hz 遠ざかる時920Hz となる。  
3%程度の違いは半音程度の差があることになる。

例題2-3 プラチナバンドについて論ぜよ。(1.4章)

(解答例) プラチナバンドは周波数700~900MHz。通常の携帯電話の周波数帯域は2GHz前後。

光速 $c=3 \times 10^8\text{m/s}$  と $c=\lambda v$  の関係より

プラチナバンドの波長 $\lambda=3 \times 10^8\text{m/s} / 900\text{MHz} = 33\text{cm}$  通常は15cm

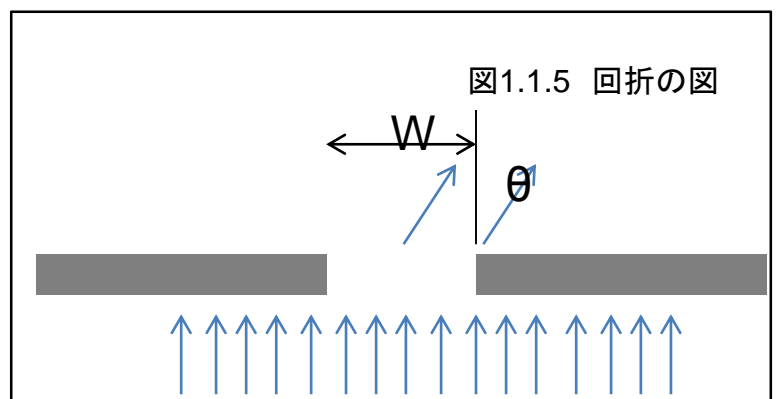
ここで幅 $W$ のスリットを通す(図1.1.5)。ことを考える。まっすぐ( $\theta=0$ )は当然強い。

中心と端を通る光が回折して弱めあう条件を考える。

光路差 $= \sin\theta W/2 = \lambda/2$  の時に弱めあう。

$\sin\theta=\lambda/W$  が大きいほど「回折しやすい」

プラチナバンドは回折が起こりやすく、「回り込んで届く」。



<<第2講終わり>>

# <<第3講>>

## 1.5 波動 (教科書99ページ~)

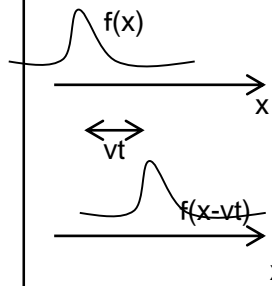
波動 ある時空  $(x, t)$  における変動が、時間がたつにつれて周囲の他の場所に伝わる現象。

**xが入るのが振動との違い**

媒質 波動を伝える物質。(注意: 光(電磁波)は物質のない真空中でも伝わる。)

縦波と横波 変動が方向を持つとき、その方向が波動の進行方向と平行(垂直)ならば、縦波(横波)という。例として、棒を伝わる縦波や弦を伝わる横波がある。

波形 時刻  $t = 0$  で変動が  $u_0 = u(x, 0) = f(x)$  であり、その形を維持したまま速度  $v > 0$  で  $+x$  方向に進む波は



座標変換を思い出そう。

$$u(x, t) = f(x - vt) \quad (1.5.1)$$

とかける。逆方向、すなわち  $-x$  方向に進む波は次のように書ける。

思い出せなかったらこのまま覚えてしまおう。

$$u(x, t) = f(x + vt) \quad (1.5.2)$$

パルスと波束  $u_0 = f(x)$  がひとつの山しか持たなければ、 $u(x, t) = f(x \pm vt)$  はその山が速さ  $v$  で伝わる波を表し、これをパルスと言う。また、限られた範囲だけで  $u \neq 0$  のとき、この波動を波束と言う。

図1.5.1 波動のイメージ

正弦波  $u_0 = f(x)$  が正弦関数の場合、

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a \sin(\omega(t - x/v) + \phi) \\ &= a \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi\right\} \\ &= a \sin(\omega t - kx + \phi) \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

など書ける。ここで  $a$ : 振幅  $\omega$ : 角振動数(角速度)  $\phi$ : 初期位相 (sin のなかは位相) であり、

直感的な関係式  
 $v = \nu \lambda$   
 速度=時間当たりの個数×波長  
 から導ける。

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.5.4)$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.5.5)$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \quad (1.5.6)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.5.7)$$

$\omega$ の定義(1.1.6)で既出

周期と振動数の関係

$\omega t$ と $kx$ を同じ様に扱える様に定義した

をそれぞれ、振動数、周期、波長、波数とよぶ。

## 1.6 波動方程式 (教科書101ページ~)

$f(\xi)$  と  $g(\xi)$  を 2 階微分可能な関数とすると、

$$u(x, t) = f(x - vt) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6.1)$$

$$u(x, t) = g(x + vt) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6.2)$$

1.71式、「波」の式を2階微分してみるとこうなる。  
 なので、その線形結合も同じ偏微分方程式を満たす。

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.6.3) \quad \text{両辺とも次元 } L^2$$

この偏微分方程式を波動方程式と呼ぶ。この偏微分方程式の一般解が上

偏微分方程式を満たす関数は波の重ねあわせであることを示す。

$$\xi = x - vt \quad (1.6.4)$$

$$\eta = x + vt \quad (1.6.5)$$

とおくと、

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1 \quad (1.6.6)$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = v \quad (1.6.7)$$

であり、 $u = u(x, t)$  の偏微分を計算していくと、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (1.6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (1.6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

となるので、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (1.6.12)$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \xi} = f'(\xi) \quad (1.6.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} = g'(\eta) \quad (1.6.14)$$

となるので、 $f'(\xi)$  は  $\eta$  によらない  $\xi$  の任意の関数、そして  $g'(\eta)$  は  $\xi$  によらない  $\eta$  の任意の関数でなくてはならない。 $u$  はそれらを積分した  $f(\xi)$  と  $g(\eta)$  の線形結合になる。

$$\begin{aligned} u &= f(\xi) + g(\eta) \\ &= f(x - vt) + g(x + vt) \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

## 1.7 重ねあわせの原理 (教科書102ページ)

$u_1(x, t)$  と  $u_2(x, t)$  がともに1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.7.1)$$

を満たすなら、その和  $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$  も同じ波動方程式の解である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial t^2} \\ &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ &= v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ &= v^2 \frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

直感的には当たり前のことをもっともらしく説明。

「いくつかの波が伝わってきたとき、各点でそれぞれの波が単独に来た場合の変位(変動)の和を変位(変動)とする波になる。」

また、波の重ねあわせで強めあつたり弱めあつたりすることを波の干渉という。

## 1.8 2次元と3次元の波動

波が2次元的あるいは3次元的につたわる。

波面 振動の位相の等しい面。

平面波 波面が平面。

球面(円面)波 波面が球面(円面)。

2次元、3次元の波動方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.7.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.7.4)$$

\*

「線密度 $\sigma$ 」といきなり言われた時点で、いやになるよな。  
 「長さあたりの質量」もっというと、「長さをかければ質量になる値」だから、次元M/L

## 1.8 弦を伝える横波 (教科書103ページ)

一様な線密度  $\sigma$  の弦を張力  $T$  で張り、横の変位を与える。横の変位を  $u = u(x, t)$  とする。変位が微少で、 $\sigma$  と  $T$  の変化も無視できるとする。 $(x, x + \Delta x)$  の微少区間  $AB$  の部分を考え、弦と  $x$  軸がなす角度を  $\theta$  とすると、 $A, B$  地点で弦に働く張力は

$$\vec{F}_A = (-T \cos \theta, -T \sin \theta) \sim -(T, T \tan \theta) \quad (1.8.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_B &= (T \cos(\theta + \Delta\theta), T \sin(\theta + \Delta\theta)) \\ &\sim (T, T \tan(\theta + \Delta\theta)) \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

ここで  $|\theta| \ll 1$  のときの近似

$$\cos \theta \sim 1 \quad (1.8.3)$$

$$\sin \theta \sim \tan \theta \quad (1.8.4)$$

を使った。 $\tan \theta$  は弦と  $x$  軸のなす角度だから、

$$\tan \theta \sim \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \quad (1.8.5)$$

$$\tan(\theta + \Delta\theta) \sim \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \quad (1.8.6)$$

である。よって  $u$  方向の運動方程式を立てると、

$$\begin{aligned} \sigma \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= T \tan(\theta + \Delta\theta) - T \tan \theta \\ &= T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] \\ &= T \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Delta x \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{微分の定義より} \\ (1.8.7) \end{array}$$

すなわち、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.8.8)$$

という波動方程式になる。前に示した波動方程式と比較すると、

$$v^2 = \frac{T}{\sigma} \rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (1.8.9)$$

となるので、弦の線密度と張力で波の進む速さが決まる。 → 次元を確認してみよう

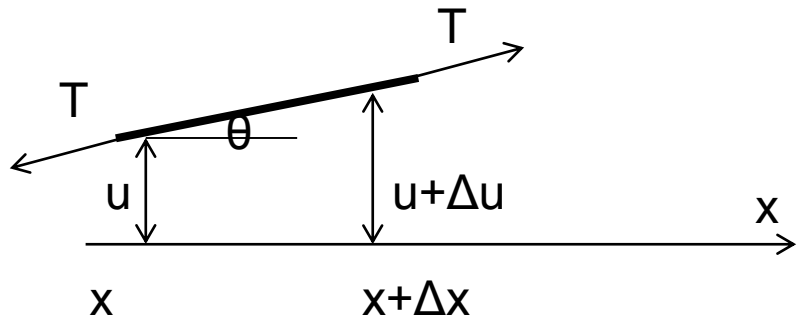
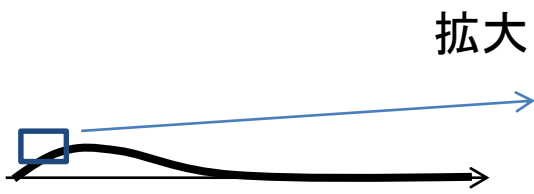


図1.8.1 横波のモデル

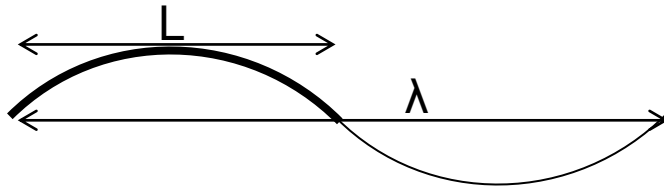


例題3-1 (1.8章)

ギターに弦を張るのに必要な張力を求めよ。必要な物理量は適当に与えること。

(解答例)

- 弦: 長さ $L=50\text{cm}$  直径 $d=0.5\text{mm}$  材質:鉄(密度 $\rho = 7.8\text{g/cm}^3$ )を仮定する。
- 音:260Hz(大体C) を出す為の 張力を考える



$$\lambda=2L$$

図1.8.2 弦の振動のモデル

1.8.9式より  $\lambda v = v = \sqrt{T/\sigma}$

よって  $T = \sigma(\lambda v)^2$

もっとも単純な振動は上記の様に $L = \lambda/2$

なので、 $T = \sigma(2Lv)^2$

数値を代入するために、単位をm, kg, s にそろえる。

$$\sigma = \pi(d/2)^2\rho = \pi(0.25 \times 10^{-3})^2 \times 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m} = \pi \times 0.48 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

$$L = 0.5\text{m}$$

$$v = 260 \text{ s}^{-1}$$

上記を代入すると  $T=100 \text{ kg m/s}^2$  程度になる。

<<第3講終わり>>

# <<第4講>>

## 1.9 波のエネルギーと強さ (教科書107ページ)

弦を伝わる横波の波の変位を

$$u(x, t) = a \sin(\omega(t - x/v) + \phi) \quad (1.9.1)$$

とすると、単位長さあたりの運動エネルギーは

$$\begin{aligned} U_K &= \frac{1}{2} \sigma \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sigma (a\omega \cos(\omega(t - x/v) + \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sigma a^2 \omega^2 \cos^2(\omega(t - x/v) + \phi) \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

一方、波のポテンシャルエネルギーは、波の通過に伴う微小部分の伸長によって決まる。長さ  $\ell_0$  の部分の伸び  $\delta l$  は

$(1+x)^a \sim 1+ax$  (x<<1の時) を使った。  $\delta l = \ell_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - \ell_0 \sim \frac{1}{2} \ell_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$  (1.9.3)

よって、弦の張力を  $T$  として波のする仕事を考えると、単位長さあたりのポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U_P = \frac{T\delta l}{\ell_0} &= \frac{1}{2} T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 && \text{位置エネルギー: } Fx \\ &= \frac{1}{2} T \left( -\frac{a\omega}{v} \cos(\omega(t - x/v) + \phi) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} T \frac{a^2 \omega^2}{v^2} \cos^2(\omega(t - x/v) + \phi) \\ &= \frac{1}{2} \sigma a^2 \omega^2 \cos^2(\omega(t - x/v) + \phi) \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

最後に  $v = \sqrt{T/\sigma}$  の関係を使った。

1周期について平均を取ると、

$$\bar{U}_K = \bar{U}_P = \frac{1}{4} \sigma a^2 \omega^2 \quad (1.9.5)$$

また、力学的エネルギーの平均値は

cos<sup>2</sup>θを0から2πまで積分するとπを使う

$$\bar{U} = \bar{U}_K + \bar{U}_P = \frac{1}{2} \sigma a^2 \omega^2 \quad (1.9.6)$$

となる。これに波の速さ  $v$  をかけたものが波が進行方向に単位時間に運ぶエネルギーであり、波の強さという。

$$I = v\bar{U} = \frac{1}{2} v \sigma a^2 \omega^2 \quad (1.9.7)$$

線密度に比例  
振幅の2乗に比例  
振動数の2乗に比例

cos<sup>2</sup>θの積分値とsin<sup>2</sup>θの積分値が等しいから、..

## 1.10 正弦波の反射と透過 (教科書108ページ～)

ある媒質  $A$  から別の媒質  $B$  に波が入射すると、波の反射と透過が起きる。反射波と透過波の角振動数は入射波のものと等しい。また、反射波の速さは入射波の速さに等しい。入射波、反射波、透過波をそれぞれ  $u_0, u_1, u_2$  とする。

$$u_0 = a \sin(\omega t - k_1 x) \quad (1.10.1)$$

$$u_1 = a_1 \sin(\omega t + k_1 x + \phi_1) \quad (1.10.2)$$

$$u_2 = a_2 \sin(\omega t - k_2 x + \phi_2) \quad (1.10.3)$$

$x < 0$  で 目的：適当な条件下で  $a_1, a_2, \phi_1, \phi_2$  を  $a, k_1, k_2$  あたりを用いて表す。

$$u = u_0 + u_1 = a \sin(\omega t - k_1 x) + a_1 \sin(\omega t + k_1 x + \phi_1) \quad (1.10.4)$$

$x > 0$  で

$$u = u_2 = a_2 \sin(\omega t - k_2 x + \phi_2) \quad (1.10.5)$$

$x = 0$  での連続性から、

$$a \sin \omega t + a_1 \sin(\omega t + \phi_1) = a_2 \sin(\omega t + \phi_2) \quad (1.10.6)$$

$$(a + a_1 \cos \phi_1 - a_2 \cos \phi_2) \sin \omega t + (a_1 \sin \phi_1 - a_2 \sin \phi_2) \cos \omega t = 0 \quad (1.10.7)$$

すなわち、次の条件が出る。

$$a_1 \sin \phi_1 - a_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (1.10.8)$$

$$a + a_1 \cos \phi_1 - a_2 \cos \phi_2 = 0 \quad (1.10.9)$$

また、 $x = 0$  で弦の傾きも等しくないと滑らかにつながらない。

$$-ak_1 \cos \omega t + a_1 k_1 \cos(\omega t + \phi_1) = -a_2 k_2 \cos(\omega t + \phi_2) \quad (1.10.10)$$

$$(-ak_1 + a_1 k_1 \cos \phi_1 + a_2 k_2 \cos \phi_2) \cos \omega t + (-a_1 k_1 \sin \phi_1 - a_2 k_2 \sin \phi_2) \sin \omega t = 0 \quad (1.10.11)$$

すなわち、次の条件が出る。

$$a_1 k_1 \sin \phi_1 + a_2 k_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (1.10.12)$$

$$-ak_1 + a_1 k_1 \cos \phi_1 + a_2 k_2 \cos \phi_2 = 0 \quad (1.10.13)$$

sin に関する 2 式から  $\sin \phi_2$  を消去すると

$$a_1(k_1 + k_2) \sin \phi_1 = 0 \quad (1.10.14)$$

よって

$$\sin \phi_1 = \sin \phi_2 = 0 \quad (1.10.15)$$

また、cos に関する式で  $\cos \phi_1$  を消去すると、

$$\cos \phi_2 = \frac{2ak_1}{a_2(k_1 + k_2)} > 0 \quad (1.10.16)$$

なので、 $\phi_2 = 0$ 、 $\phi_1 = 0, \pi$  である。

$\phi_1 = 0$  ( $\cos \phi_1 = 1$ ) のとき、

$$a_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} a = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} a \quad (1.10.17)$$

$$a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} a = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} a \quad (1.10.18)$$

ここで、 $k_1 = \omega/v_1$ ,  $k_2 = \omega/v_2$  の関係を用いた。 $\phi_1 = \pi$  ( $\cos \phi_1 = -1$ ) のとき、

$$a_1 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} a = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a \quad (1.10.19)$$

$$a_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} a = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} a \quad (1.10.20)$$

どちらの場合も、波の強さはそれぞれ、

$$I_r = \frac{1}{2} v_1 \sigma_1 a_1^2 \omega^2 = \frac{1}{2} v_1 \sigma_1 \left( \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 a^2 \omega^2 \quad (1.10.21)$$

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{1}{2} v_2 \sigma_2 a_2^2 \omega^2 = \frac{1}{2} v_2 \sigma_2 \left( \frac{2v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 a^2 \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} v_1 \sigma_1 \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2} a^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (1.10.22)$$

ここまで来て、出だしの気持ち悪さ、 $k_2$ をinputパラメータとしたことに対して考察する。  
 (1.139),(1.140)より  $R+T=1$ なので どちらか一方をinputパラメータにできればよさそうだ。  
 たとえば、「反射率R」をinputパラメータにすれば、 $v_2$ 経路で $k_2$ が一意に決まるので、  
 出だしを「 $a, k_1, R$ を用いて、、、」という直感的に納得できる話にできる。

ここで、 $T = \sigma_1 v_1^2 = \sigma_2 v_2^2$  の関係を用いた。

$$I_r + I_t = \frac{1}{2} v_1 \sigma_1 a^2 \omega^2 = I_0 \quad (1.10.22)$$

だから、エネルギーの流れはあっている。反射率と透過率はそれぞれ、次のようになる。

$$I_r/I_0 = R = \left( \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \quad (1.10.23)$$

$$I_t/I_0 = T = \frac{4v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2} \quad (1.10.23)$$

## 1.11 定常波 (定在波) (教科書108ページ~)

+ $x$  方向に進む波と - $x$  方向に進む振幅と角振動数の等しい正弦波の重ねあわせを考える (入射波と反射波を考えれば良い)。

$$u_1(x, t) = a \sin \left\{ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_1 \right\} \quad (1.11.1)$$

$$u_2(x, t) = a \sin \left\{ 2\pi \left( \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) + \phi_2 \right\} \quad (1.11.2)$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= 2a \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \sin \left( \frac{2\pi t}{T} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.11.3)$$

ここで、三角関数の公式  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$  を使った。

このとき、位置  $x$  では振幅  $2a \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$  の振動がおきる。この部分は時刻  $t$  を含まないから、波の山や谷の位置は進行しない。この場合を定常波 (定在波) という。振幅が 0 になる位置を節という。節の位置は、

$$2a \cos \left( \frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = 0 \quad (1.11.4)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left( x - \frac{\lambda(\phi_1 - \phi_2)}{4\pi} \right) = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \quad (1.11.5)$$

$$x - \frac{\lambda(\phi_1 - \phi_2)}{4\pi} = \frac{\lambda}{4} (2n + 1) \quad (1.11.6)$$

ここで、 $n$  は整数。よって、 $x_0 = (\phi_1 - \phi_2)\lambda/4\pi$  とすると、

$$x - x_0 = \pm \frac{\lambda}{4}, \pm \frac{3\lambda}{4}, \pm \frac{5\lambda}{4}, \dots \quad (1.11.7)$$

節間隔は  $\lambda/2$

$x$  と  $t$  が別の三角関数に入っている事がポイント  
関数の形、解釈は、うなりの式 (1.48) に似ている。

が節の位置である。一方、振幅が最大になる位置を腹といい、

$$x - x_0 = \pm \frac{n\lambda}{2} \quad (1.11.8)$$

$$= 0, \pm \frac{\lambda}{2}, \pm \lambda, \pm \frac{3\lambda}{2}, \dots \quad (1.11.9)$$

である。

）両端が固定された長さ  $\ell$  の弦の固有振動を考えよう。両端が固定されているので、節になる条件から

$$\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 0 \quad (1.11.10)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 0 \quad (1.11.11)$$

よって、 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \pi$  であり、

$$\cos\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{2\pi\ell}{\lambda} = 0 \quad (1.11.12)$$

$$\frac{2\pi\ell}{\lambda} = n\pi \quad (1.11.13)$$

よって、

$$\lambda = \frac{2\ell}{n} = 2\ell, \ell, \frac{2\ell}{3}, \frac{\ell}{2}, \dots \quad (1.11.14)$$

となる。これを振動数で書き直すと、

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{v}{\lambda} \\ &= \frac{n}{2\ell}v \\ &= \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \end{aligned} \quad (1.11.16)$$

$n = 1$  の場合を基本振動、 $n = 2$  の場合を 2 倍振動、 $n = 3$  の場合を 3 倍振動などという。

このように、ある振動系に対して定在波の立つ条件を共鳴条件という。共鳴現象はあらゆる振動系に共通な物理現象である。

## 群速度♠

つぎに、振動数と波長がわずかに異なる場合を考えよう。

$$u_1 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) \quad (1.11.17)$$

$$u_2 = a \sin(\omega_2 t - k_2 x + \phi_2) \quad (1.11.18)$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= 2a \cos(\Delta\omega t - \Delta k x + \Delta\phi) \sin(\omega t - kx + \phi) \end{aligned} \quad (1.11.19)$$

1.74、1.75の関係などを参考しつつ。

$$\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2, \quad (1.11.20)$$

$$\Delta k = (k_1 - k_2)/2, \quad (1.11.21)$$

$$\Delta\phi = (\phi_1 - \phi_2)/2, \quad (1.11.22)$$

$$\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2, \quad (1.11.22)$$

$$k = (k_1 + k_2)/2, \quad (1.11.23)$$

$$\phi = (\phi_1 + \phi_2)/2. \quad (1.11.24)$$

$\Delta\omega \ll \omega$  なので、 $\cos$  の部分はゆっくりと変化し、これが徐々に変化する振幅の役割を果たす。その進む速さは

$$U_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.11.25)$$

であり、これを群速度という。一方、

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (1.11.26)$$

を位相速度という。

例題4-1

<<第4講終わり>>



# 振動と波動 まとめ地図

# 次元計算 数値計算

できて欲しいこと

式を立てる

抵抗力 $\gamma v$ を考慮

運動方程式  $m\ddot{x} = -kx$  (1.1.1)

式を立てる

$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - kx$  (1.1.9)

減衰振動

グラフを描く

$x(t) = Ce^{-\gamma t/2m} \cos(\omega t + \phi_0)$  (1.1.18)

単振動

グラフを描く

$x(t) = C \cos(\omega t + \phi_0)$  (1.1.5)

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

振動の合成

$x_1 = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1)$  (1.2.1)

$x_2 = a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$  (1.2.2)

$x = x_1 + x_2$  (1.2.4)  
 $= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$

$\omega_1 = \omega_2 = \omega$  のとき  $x(t) = a \sin(\omega t + \Phi)$  (1.2.5)

$\omega_1 \sim \omega_2$  のとき

$x = 2a \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$  (1.2.8)

うなりの回数  $\left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right| / \pi = |\nu_1 - \nu_2|$  (1.2.10)

(1.2.8)式を見て「うなり」を説明、(1.2.10)式を導出

xを固定

波動の式(正弦波の例)

$u(x, t) = a \sin(\omega(t - x/v) + \phi)$  (1.5.3)

波動方程式

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  (1.7.1)

運動エネルギー  
+ 位置エネルギー

波のエネルギー

$I = v\bar{U} = \frac{1}{2} v \sigma a^2 \omega^2$  (1.9.7)

入射波 + 反射波

波動方程式  
を見たときに速度を  
書ける

縦波、横波  
モデル計算

波の速度

$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$  (1.8.9)

定在波

$u = 2a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$  (1.11.3)

この式が「定在」であることの説明、節間隔の計算

T,  $\sigma$ ,  $\rho$ , E に具体的な数値を入れてvの計算

## 第2章 連続体の力学

(教科書68ページ～)

### 2.1 固体と変形

質点 質量を持ち、大きさを持たない点状の粒子。

剛体 質点の集まり。質点間の距離が不変。質量分布が変化しない。

実際の物質は原子・分子の集合体であり、分子・原子間の距離が変ること  
で変形する。

連続体 物質の質量が連続的に分布するものを連続体という。

- 固体
- 液体
- 気体

変形 固体に力を加えると形が変ること。

弾性 変形を元に戻そうとする性質(元の釣り合いの位置に戻ろうとする)。

#### 2.1.1 ずれと応力

応力：連続物体内の1つの面の両側の部分  
が作用しあう単位面積当たりの力

断面積  $S$  の棒を両端から大きさ  $F$  の力で引っ張る。棒と角度  $\theta$  をなす  
仮想的な断面を考えると力の釣り合いから次の関係式を得る。

$$F = fS' = fS / \sin \theta \quad (2.1)$$

ここで、 $S'$  は仮想的な断面の面積で、 $f$  は単位面積当たりに働く力(応力)  
である。この式から応力の大きさは

$$f = \frac{F}{S} \sin \theta \quad (2.2)$$

この応力は連続体の断面の両側から作用する。また、断面に対して垂直  
な成分と平行な成分をそれぞれ法線応力、接線応力と呼ぶ。

$$f_n = f \sin \theta = \frac{F}{S} \sin^2 \theta \quad (2.3)$$

$$f_t = f \cos \theta = \frac{F}{S} \sin \theta \cos \theta \quad (2.4)$$

応力の単位は  $[\text{N}/\text{m}^2]$ 。

引きあう法線応力：張力  
押し合う法線応力：圧力

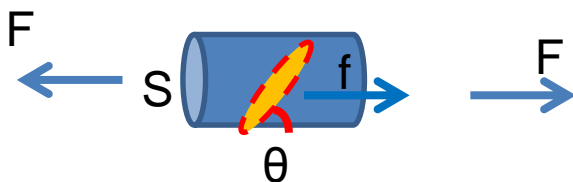


図2.1.1 応力の概念

## 2.1.2 応力歪み曲線 (教科書70ページ～)

棒に力を加えて(引っ張り)、伸ばしていく。もとの長さを  $l$  とし、伸びを  $\Delta l$  とすると  $\Delta l/l$  を歪みという。

- 最初、歪みは応力に比例するが、
- あるところから比例しなくなる(比例限界) **A**
- そしてさらに、あるところから元に戻らなくなる(弾性限界) **B**
- そして、最後はちぎれてしまう(破断点) **C**

応力と歪みが比例限界内にあるときフックの法則が成り立つ。

$$\frac{\Delta l}{l} \propto \frac{F}{S} \quad (2.18)$$

フックの法則が成り立つ物質を弾性体という。

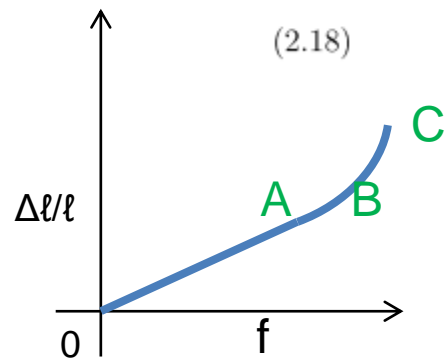


図2.1.2 応力ひずみ曲線

物質	ヤング率 [N・m <sup>-2</sup> ]	ポアソン比	密度 [g/cm <sup>-3</sup> ]
鋼鉄	$20 \times 10^{10}$	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	$7 \times 10^{10}$	0.35	2.7
ガラス	$7 \times 10^{10}$	0.22	2.2-3.6
ゴム	$5 \times 10^6$	0.5	0.9-1.0

表2.1.1: さまざまな物質の物性(理科年表)

## 2.2 弾性の定数 (教科書71ページ~)

$E$ :ヤング率

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (2.19)$$

$\sigma$ :ポアソン比 棒を伸ばしたときの縦方向の歪みとその垂直方向の歪みの比。

$$\sigma = -\frac{\Delta b/b}{\Delta \ell/\ell} \quad (2.22)$$

$k$ :体積弾性率 圧力が  $p$  から  $p + \Delta p$  に変化するとき、体積が  $v$  から  $v + \Delta v$  に変化する。

$$\Delta p = -k \frac{\Delta v}{v} \quad (2.20)$$

通常、 $p$  は大気圧。また、 $\kappa = 1/k$  を圧縮率という。

$G$ :剛性率 (ずれ弾性率) 接線応力に対して、角度  $\phi \sim \Delta a/b$  歪む。

$$\frac{F}{S} = G\phi \quad (2.21)$$

ものすごく乱暴な言い方をすると  
ヤング率：堅さ  
ポアソン比：粘り

それぞれの定数の次元を考えてみよう。

これら4つの定数のうち、独立なものは2つであり、次の関係が導ける。

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad (2.23)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad (2.24)$$

$$E = \frac{9kG}{3k+G} \quad (2.25)$$

$$\sigma = \frac{3k-2G}{2(3k+G)} \quad (2.26)$$

実験で簡単に求められるのが  $E$  と  $\sigma$  なので、2.23 と 2.24 が実用的。

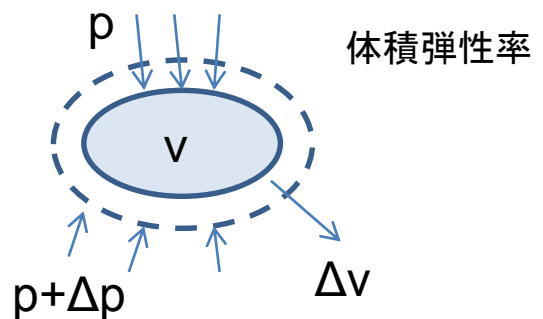
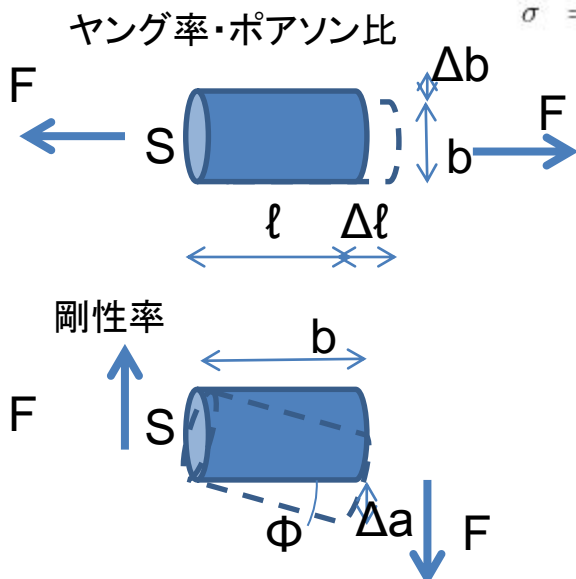


図2.2.1 応力の定義

### 2.2.1 第1式の証明

一辺  $\ell$  の立方体を考え、圧力が  $p \rightarrow p + \Delta p$  になったとする。

ここでのFは新たに増えた分の力 
$$\frac{F}{S} = -\Delta p = E \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (2.27)$$

の式から、 $x$  方向からの圧力により  $x$  方向に  $\Delta p \ell / E$  だけ縮む。しかし、 $y$  方向、 $z$  方向にも同じだけ縮むので、その  $2\sigma$  倍  $x$  方向に伸びることになる。よって、正味の長さの変化は

$$\Delta \ell = -(1 - 2\sigma) \frac{\Delta p \ell}{E} \quad (2.28)$$

これを体積変化率になおすと、

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(\ell + \Delta \ell)^3 - \ell^3}{\ell^3} \quad (2.29)$$

$$= 3 \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (2.30)$$

$\Delta \ell / \ell$  の二次以上を無視

$$= -3 \frac{(1 - 2\sigma)}{E} \Delta p = -\frac{\Delta p}{k} \quad (2.31)$$

2.20式より

よって、最初の関係式が成立。また、 $k > 0$  であることから、 $\sigma < 1/2$  でなくてはならない。

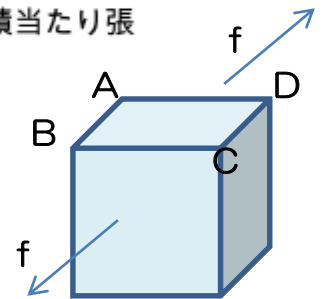
### 2.2.2 第2式の証明

1辺の長さ  $\ell$  の立方体を考え、 $AD$  の面と  $BC$  の面で単位面積当たり張力  $f$  で引っ張る。

- $AB$  方向の長さは  $AB' = \ell(1 + f/E)$ 。
- $AD$  方向の長さは  $AD' = \ell(1 - \sigma f/E)$ 。

2.4式 → • 対角線  $BD$  面の接線応力は  $f_t = f \sin \theta \cos \theta = f/2$ 。

- $AC$  と  $BD$  のなす角を  $\frac{\pi}{2} + \phi$  とすると、角  $ADB = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$ 。



- 剛性率の関係式は、

$$f_t = \frac{f}{2} = G \times \phi \quad (2.32)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{AB}{AD} = \frac{1 + f/E}{1 - \sigma f/E} \sim 1 + (1 + \sigma)f/E \quad (2.33)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) = \frac{1 + \tan \frac{\phi}{2}}{1 - \tan \frac{\phi}{2}} \sim 1 + 2 \tan \frac{\phi}{2} \sim 1 + \phi \quad (2.34)$$

よって、

tanの加法定理

$$\phi \sim \frac{(1 + \sigma)f}{E} \quad (2.35)$$

- 以上から、

$$G = \frac{f_t}{\phi} = \frac{f}{2\phi} = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \quad (2.36)$$

例題5-1 バンジージャンプを物理的に考えよ。

命綱を直径  $d = 0.1\text{m}$ 、長さ  $l = 10\text{m}$  のゴム(ヤング率  $E = 5 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$ )

飛び降りる人間の体重を  $m$  [kg]とする

伸びを  $\Delta l$  とすると、ヤング率の定義より、 $\frac{\Delta l}{l} E = \frac{F}{S}$  となる。ここで、 $F$ はかかる力、 $S$ はばねの断面積。

ばね定数  $k$  の定義は、 $k\Delta l = F$  なので  $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{SE}{l} = \frac{\pi 0.05^2 \times 5 \times 10^6}{10} = 4 \times 10^3 [\text{N/m}]$

この命綱に普通にぶら下がると  $\Delta l = \frac{F}{k} = \frac{mg}{k} = \frac{60 \times 9.8}{4 \times 10^3} = 0.15 [\text{m}]$  程度の伸び。

バンジージャンプでは、位置エネルギーが全てばねのエネルギーとなると考えることができ、

$mgl = \frac{1}{2} k \Delta l^2$ となる。

$$\Delta l = \sqrt{\frac{2mgl}{k}} = \sqrt{\frac{2 \times 60 \times 9.8 \times 10}{4 \times 10^3}} = \sqrt{3.0} = 1.7 [\text{m}] \text{程度伸びる。}$$

## <<第6講>>

### 2.3 弾性変形(たわみ、ねじれ) 教科書(73ページ~)

#### 2.3.1 剛体の力学

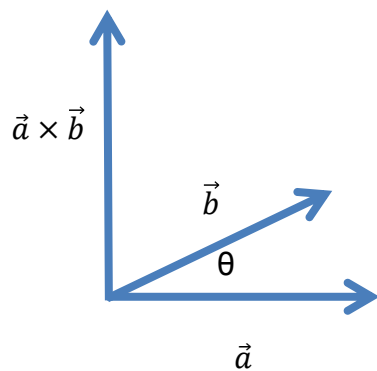
静止している剛体では、次のつり合いの式が成り立つ。

$$\sum \vec{F}_i = \mathbf{0} \quad (2.3.1)$$

$$\sum \vec{N}_i = \mathbf{0} \quad (2.3.2)$$

$\vec{F}_i$ : ベクトルとしての力  $\vec{N}_i$ : 任意の一点の周りのモーメント ( $=\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ )

弾性体の変形は(2.3.2)式を元にして議論することが多い。



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a||b|\sin \theta$$

図2.3.1 外積の定義

### 2.3.2 たわみ

ヤング率Eの一樣な棒を曲げた時のたわみを考える。

棒が伸びる部分と縮む部分ができ、その間に伸縮しない中立層（曲率半径R）がある。  
中立層からの距離をzとする。

zでの伸び $\Delta l$ は

$$\Delta l = (R + z)d\theta - Rd\theta = zd\theta \quad (2.3.3)$$

zにおける応力は

$$f = E \frac{\Delta l}{l} = E \frac{zd\theta}{Rd\theta} = E \frac{z}{R} \quad (2.3.4)$$

断面では上下逆向きの力が働いているので、回転「モーメント」が働く。

断面におけるモーメントの定義

曲げモーメントM  $M = \int fzdS = \frac{E}{R} \int z^2 dS = \frac{E}{R} I \quad (2.3.5)$

ここで、断面2次モーメント  $I \equiv \int z^2 dS$  を使った。  $(2.3.6)$

応力が単位面積当たりの力なので、dSをかける。

図2.3.3で回転モーメントの和が0になることを考える。

時計回りを正にとると、

左側（重心を含む方）では

$$\frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} + x \right) - xF - M = 0 \quad (2.3.7)$$

右側（重心を含まない方）では、

$$M - \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right) = 0 \quad (2.3.8)$$

いずれからも

$$M = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (2.3.9)$$

を得る。

応力によるモーメント(2.3.5)が(2.3.9)式のモーメントなので

$$M = \frac{E}{R} I = \frac{F}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (2.3.10)$$

を得る。



以下、形状依存

○ 角棒

長さ  $l$ 、質量  $m$ 、断面が長方形 ( $a \times b$ ) の棒

断面2次モーメント  $I$  は

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} z^2 b dz = \frac{1}{12} a^3 b \quad (2.3.7)$$

曲げモーメント  $M$  は

$$M = \frac{E a^3 b}{R 12} \quad (2.3.8)$$

棒の中心からの距離  $x$  での力のモーメントの釣り合いは

$$\frac{E a^3 b}{R(x) 12} = \frac{mg}{2} \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (2.3.9)$$

曲率半径  $R(x)$  について以下を得る。

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{6mg}{E a^3 b} \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (2.3.10)$$

曲線の方程式に  $x = 0$  を代入して、(2.3.10) を得る。

$$f(0) = -\frac{mgl^3}{4a^3bE} \quad (2.3.15)$$

- 曲線  $y = f(x)$  の曲率半径は、 $y' = f'(x)$  が小さいとき、微分幾何学の公式から次のようになる。 ♠

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \sim y'' \quad (2.3.12)$$

- よって、次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6mg}{E a^3 b} \left( \frac{l}{2} - x \right) \quad (2.3.13)$$

- $y = 0$  at  $x = l/2$  および  $dy/dx = 0$  at  $x = 0$  とすると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6mg}{E a^3 b} \left( \frac{l}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right) \quad (2.3.14)$$

$$= \frac{6mg}{E a^3 b} \left( \frac{l}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{l^3}{24} \right) \quad (2.47)$$

○丸棒

長さ  $l$ 、質量  $m$ 、断面が円(半径  $r$ )の棒を両端で支持した時の中央の落ち込みを考える。

角棒の時と同様にして

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad (2.3.16)$$

$$M = \frac{E \pi r^4}{R \cdot 4} \quad (2.3.17)$$

$$f(0) = -\frac{mgl^3}{16\pi r^4 E} \quad (2.3.18)$$

(2.3.16)の導出

$$I = 2 \int_0^r z^2 \sqrt{r^2 - z^2} dz$$

(ここで  $z = r \sin \theta$  ( $\frac{dz}{d\theta} = r \cos \theta$ ,  $z \mid 0 \rightarrow r$   $\theta \mid 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ) とすると)

$$= 2 \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2 \theta r \cos \theta r \cos \theta d\theta$$

$$= 2r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2r^4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin^2 2\theta d\theta \quad (\because \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= r^4 \int_0^{\pi} \sin^2 \phi \frac{1}{2} d\phi \quad (2\theta = \phi \text{とした})$$

$$= 2r^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \frac{1}{2} d\phi$$

$$= r^4 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi$$

$$= \frac{1}{2} r^4 \int_0^{\pi/2} d\phi$$

$$= \frac{\pi r^4}{4}$$



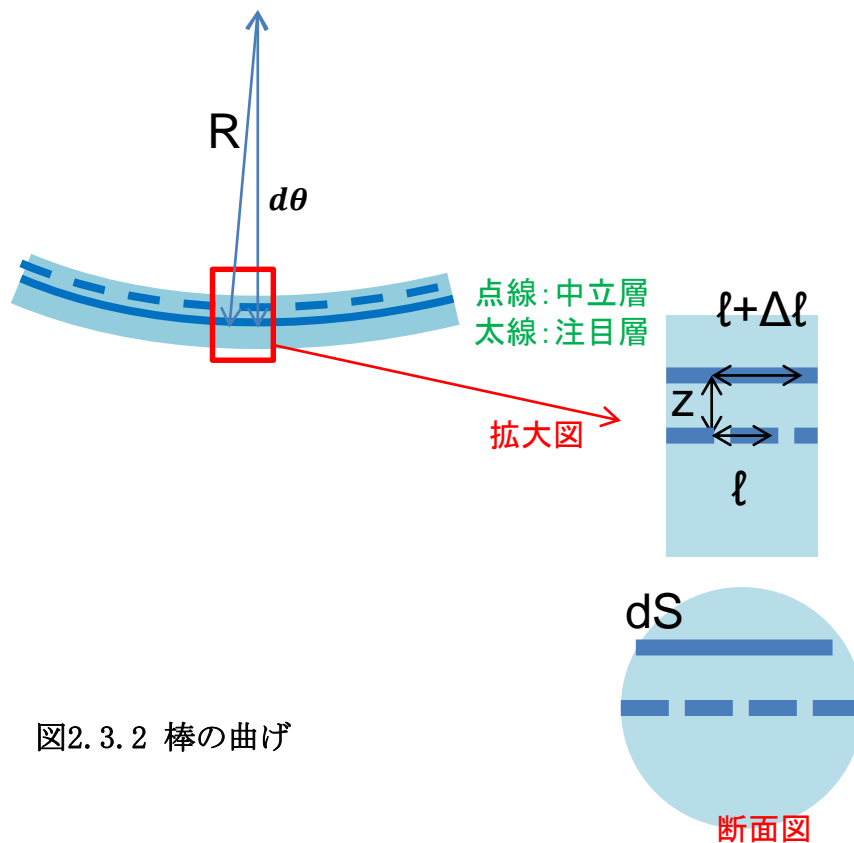


図2.3.2 棒の曲げ

$dS$ :  $z \sim z+dz$ 間の断面の面積

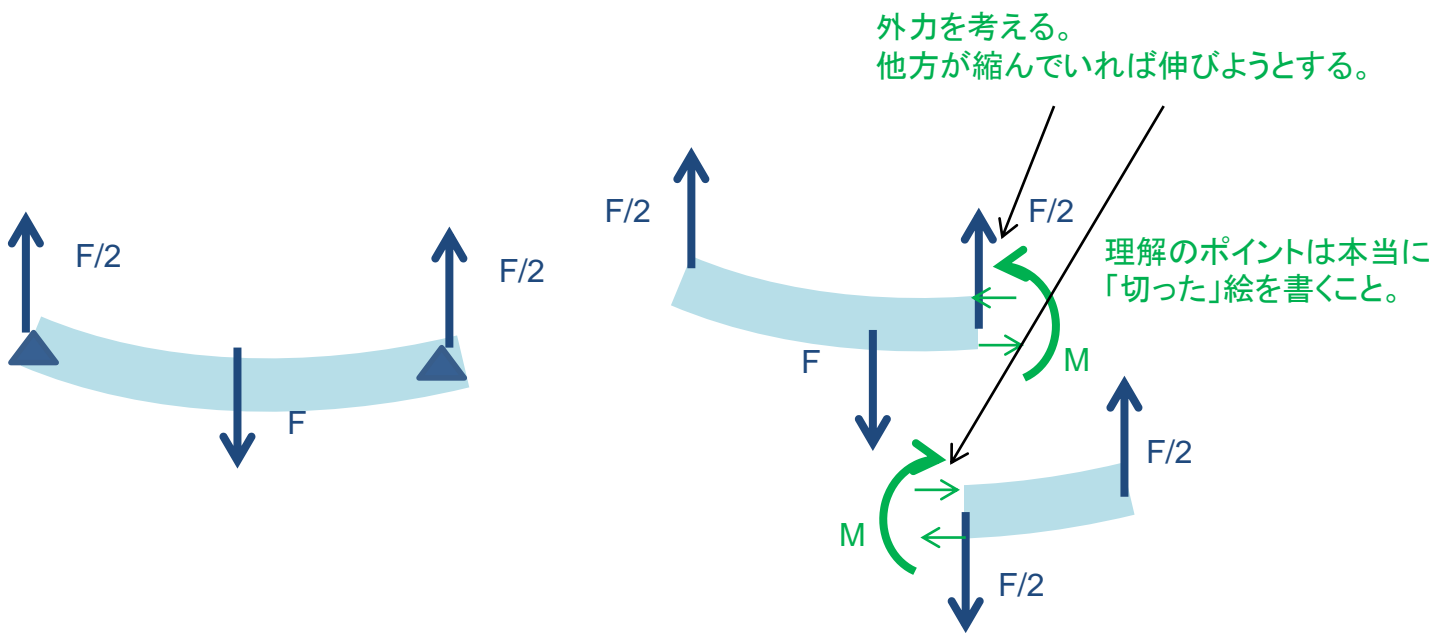


図2.3.3 棒のたわみ

### 2.3.3 数学的補足 ♠

曲線  $y = f(x)$  上の点  $(x, y)$  と、その近傍の2点  $(x + \Delta x, y + y'\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 y'')$  および  $(x - \Delta x, y - y'\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 y'')$  が同一の円上にあるとする。この円の中心を  $(A, B)$  および半径を  $R$  とすると、次の連立方程式を得る。

$$(x - A)^2 + (y - B)^2 = R^2 \quad (2.3.19)$$

$$(x + \Delta x - A)^2 + (y + y'\Delta x + \frac{1}{2}y''(\Delta x)^2 - B)^2 = R^2 \quad (2.3.20)$$

$$(x - \Delta x - A)^2 + (y - y'\Delta x + \frac{1}{2}y''(\Delta x)^2 - B)^2 = R^2 \quad (2.3.21)$$

二式から一式をひいて  $\Delta x$  の2次の項を無視すると、

$$(x - A)\Delta x + (y - B)y'\Delta x = 0 \quad (2.3.22)$$

$$x - A = -(y - B)y' \quad (2.3.23)$$

二式と三式の和を取り、 $\Delta x$  の4次の項を無視すると、

$$2(x - A)^2 + 2(\Delta x)^2 + 2(y - B)^2 + 2y'^2(\Delta x)^2 + 2(y - B)y''(\Delta x)^2 = 2R^2 \quad (2.3.24)$$

$$1 + y'^2 + (y - B)y'' = 0 \quad (2.3.25)$$

$$y - B = -\frac{1 + y'^2}{y''} \quad (2.3.26)$$

よって、

$$x - A = -(y - B)y' = \frac{(1 + y'^2)y'}{y''} \quad (2.3.27)$$

であり、

$$R^2 = (x - A)^2 + (y - B)^2 \quad (2.3.28)$$

$$= (1 + y'^2) \left( \frac{1 + y'^2}{y''} \right)^2 \quad (2.3.29)$$

$$= \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2} \quad (2.3.30)$$

すなわち

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (2.3.31)$$

### 2.3.4 ねじれ

- 半径  $a$ , 長さ  $\ell$ , 剛性率  $G$  の円筒の下端に偶力を働かせて  $\theta$  回転させる。
- このとき  $r \rightarrow r + dr$  の部分を取りだしてみると、

$$\phi = \frac{r\theta}{\ell} \quad (2.3.32)$$

なので、応力は

$$f = G\phi = \frac{Gr\theta}{\ell} \quad (2.3.33)$$

$r \sim r+dr$  の円環部分

- この部分による力のモーメントは

$$Fr = frdS = \frac{Gr\theta}{\ell} \times r \times 2\pi r dr = \frac{2\pi Gr^3\theta}{\ell} dr \quad (2.3.34)$$

- これを  $0 < r < a$  で積分して、応力による力のモーメントは次のようになる。

$$N = \int_0^a \frac{2\pi Gr^3\theta}{\ell} dr = \frac{\pi Ga^4}{2\ell} \theta \quad (2.3.35)$$

この円筒に慣性能率  $I$  の重りをつけると、ねじり振り子ができる。その運動方程式は

(1.1) 式  $ma = -kx$  参照  $I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\pi Ga^4}{2\ell} \theta \quad (2.3.36)$

これは単振動の式であり、その角周波数を  $\omega$  とすれば、

(1.2.1) 式  $\omega = \sqrt{k/m}$  参照  $\omega = \sqrt{\frac{\pi Ga^4}{2\ell I}} \quad (2.3.37)$

$\ell, a, G$  をと  $\omega$  との関係を考えてみよう。

その周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2\ell I}{\pi Ga^4}} \quad (2.3.38)$$

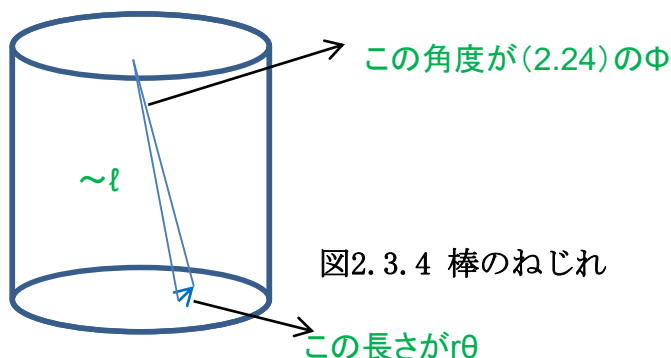


図2.3.4 棒のねじれ

<<第6講終わり>>

例題6-1 右の写真に関して論ぜよ。

(解答例) 弾性体のモデルとして考える。

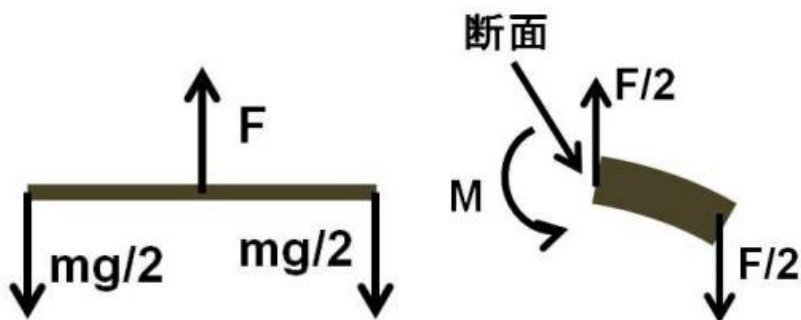
棒の長さおもりをそれぞれ  $m/2$  とした時の釣り合いの式、力のモーメントの釣り合いを以下に図示する。

右の図で力のモーメントの釣り合いは  $\frac{l}{2}F = (\frac{l}{2} + x) \cdot \frac{F}{2} + M$

棒についてのたわみは  $y = \frac{mgl^3}{16\pi r^4 E}$  でなので適当なパラメータを代入してたわみが計算できる。

$l = 2\text{m}$   $r = 0.01\text{m}$   $m = 200\text{kg}$ 、 $E = 20 \times 10^{10}\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$  を代入して、

$$y = \frac{200 \times 9.8 \times 2^3}{16 \times \pi \times (0.01)^4 \times 20 \times 10^{10}} = 0.2\text{m} \text{ を得る。}$$



例題6-2

(解答例)

ヤング率  $E = 2 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ 、 $a = b = 1\text{cm}$ 、 $\ell = 1\text{m}$  の棒がある。

- 棒の上端を固定して下端に質量  $1\text{kg}$  の重りを吊したときの伸びは

$$\Delta\ell = \frac{F/S}{E} \times \ell = \frac{9.8/(0.01)^2}{2 \times 10^{11}} \times 1 = 4.9 \times 10^{-7}\text{m} \quad (2.49)$$

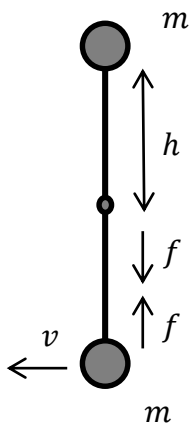
- 両端を固定し、中央に質量  $M$  の重りをぶらさげた時の降下は

$$\Delta y = \frac{mg\ell^3}{4Ea^3b} = \frac{9.8 \times 1^3}{2 \times 10^{11} \times 4 \times (0.01)^4} = 1.2 \times 10^{-3}\text{m} \quad (2.50)$$

• 例題6-3 体操の鉄棒の材質について以下の写真を見て考察せよ。

– (解答例) 丸い棒のたわみは  $\frac{Fl^3}{16\pi r^4 E}$  で表される。

回転によって棒にかかる力の増加分  $f$  を考える。



回転運動なので、

$$f = m\ddot{x} = m \frac{\dot{x}^2}{r}$$

重量エネルギーをすべて運動エネルギーに変換しているとする、

$$mg2h = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

よって  $m \frac{\dot{x}^2}{r} = 4mg$

運動方程式に代入して、

$$f = m \frac{\dot{x}^2}{r} = 4mg$$

$F = f + mg = 5mg$  これをたわみの式に代入、ヤング率を求める。

$$E = \frac{Fl^3}{16\pi r^4 y}$$

ここで、 $l$

は鉄棒の長さ、 $r$ は鉄棒の半径  $y$ はたわみである。



## <<第7講>>

### 2.4 弾性のエネルギー

ヤング率  $E$ , 長さ  $\ell$ , 断面積  $S$  の棒を  $\Delta\ell$  だけ引きのばすには、どれだけの仕事が必要か？

一般に仕事  $\Delta W = F\Delta x$

- 長さ  $\ell + x$  のときの応力は

$$\frac{F}{S} = E \frac{x}{\ell} \quad (2.4.1)$$

よって、 $\ell \rightarrow \ell + \Delta\ell$  になるまでの仕事は

この  $x$  は「伸び」なので、積分区間は  $0$  から  $\Delta\ell$

$$\int_0^{\Delta\ell} F dx = \int_0^{\Delta\ell} SE \frac{x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \frac{SE}{\ell} (\Delta\ell)^2 \quad (2.4.2)$$

- これを単位体積あたりの仕事に直すと、

$$\frac{1}{2} \frac{SE}{\ell} (\Delta\ell)^2 / S\ell = \frac{1}{2} E \left( \frac{\Delta\ell}{\ell} \right)^2 \quad (2.4.3)$$

これを弾性エネルギーという。

一般に、単位体積あたりの弾性エネルギーは

$$\frac{1}{2} \times (\text{弾性率}) \times (\text{ひずみ})^2 \quad (2.4.4)$$

の形で書ける。

弾性率の次元が単位体積あたりのエネルギーとなっていることを確認しよう。

#### ◆弾性エネルギーとばねのエネルギー

ばね定数  $k$  のばねが  $x$  だけ伸びた時に蓄えられているエネルギーは  $\frac{1}{2} kx^2$  である。これと (2.4.3) 式が等価であることを示そう。



## 2.5 弾性波

### 2.5.1 棒を伝わる縦波

密度  $\rho$ 、ヤング率  $E$  の一様な棒を伝わる縦波。もともと  $(x, x + \Delta x)$  の部分が変形して  $(x + u, x + \Delta x + u + \Delta u)$  の位置に移ったとする。断面における応力は

$$F/S = E \frac{\Delta u}{\Delta x} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.5.1)$$

である。もともと  $x \rightarrow x + \Delta x$  の部分の運動方程式を立てると

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_{x+\Delta x} - F_x = SE \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = SE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \quad (2.5.2)$$

すなわち次の波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5.3)$$

この式から、棒を伝わる縦波の速さは  $\sqrt{E/\rho}$ 。

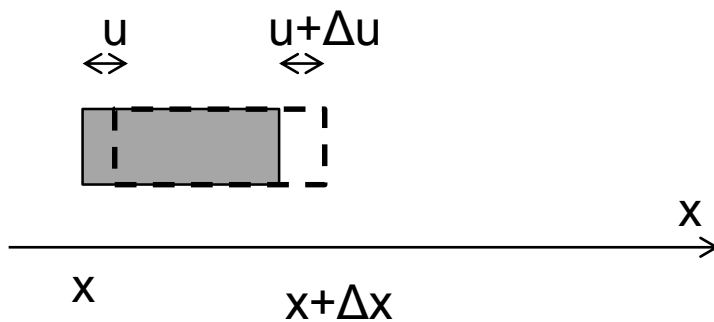


図2.5.1 棒を伝わる縦波のモデル図

## 2.5.2 固体を伝わる縦波 進行方向と垂直方向の応力の比を考える

弾性体のなかに直方を考え、 $x$  方向に縦波が進み、横方向には伸縮しないとする。このとき

ヤング率によるひずみ+ポアソン比による歪み

$$\Delta a = \frac{f_x}{E}a - \sigma \left( \frac{f_y}{E} + \frac{f_z}{E} \right) a \quad (2.5.4)$$

$$\Delta b = \frac{f_y}{E}b - \sigma \left( \frac{f_z}{E} + \frac{f_x}{E} \right) b = 0 \quad (2.5.5)$$

$$\Delta c = \frac{f_z}{E}c - \sigma \left( \frac{f_x}{E} + \frac{f_y}{E} \right) c = 0 \quad (2.5.6)$$

よって、

$$f_y = \sigma(f_x + f_z) \quad (2.5.7)$$

$$f_z = \sigma(f_x + f_y) \quad (2.5.8)$$

なので、

$$f_y = f_z = \frac{\sigma}{1 - \sigma} f_x \quad (2.5.9)$$

となり、

$$\begin{aligned} \Delta a &= \frac{f_x}{E}a \left( 1 - 2\sigma \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right) \\ &= \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma} \frac{f_x}{E}a \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

よって、実質的なヤング率は

$$\begin{aligned} E' &= \frac{(1 - \sigma)E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \\ &= \frac{2}{3} \frac{E}{1 + \sigma} + \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\sigma} \\ &= k + \frac{4}{3}G \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

ここで、 $k = E/3(1 - 2\sigma)$  と  $G = E/2(1 + \sigma)$  の関係式を用いた。以上から、縦波の速さは

$$v = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad (2.5.12)$$

となる。

### 2.5.3 固体を伝わる横波

座標 $x$ での横方向の変位を $u$ 、 $x + \Delta x$ での変位を $u + \Delta u$ とする。弾性率の定義より、応力は

$$F/S = G\phi = G \frac{\Delta u}{\Delta x} = G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.5.13)$$

固体の密度を $\rho$ として、断面積 $S$ で $x \rightarrow x + \Delta x$ の部分の運動方程式を立てると

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_{x+\Delta x} - F_x = SG \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] = SG \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \quad (2.5.14)$$

すなわち次の波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.5.15)$$

この式から、固体を伝わる横波の速さは $\sqrt{G/\rho}$ 。

縦波の速さ $(\sqrt{(k + \frac{4}{3}G)/\rho})$ は横波の速さ $(\sqrt{G/\rho})$ より大きい。

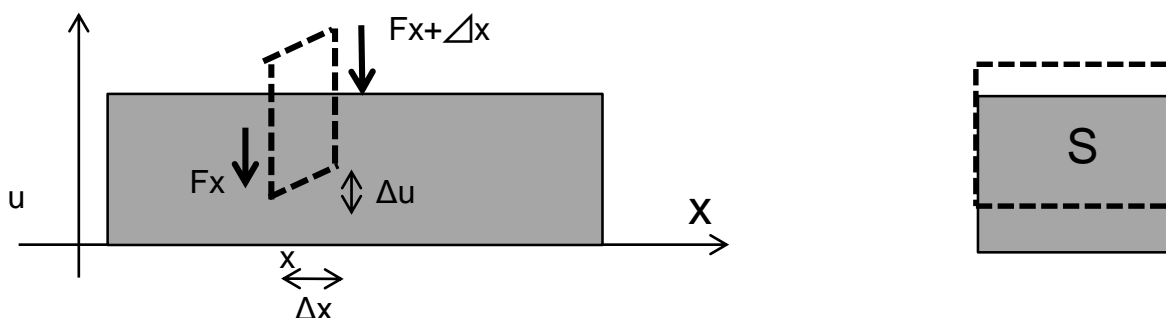


図2.5.2 棒を伝わる横波のモデル図

• 例題7-1 地震波の速度を論ぜよ

(解答例)

花崗岩の弾性率(～ヤング率)  $10 \sim 100 \text{ GPa}$ 程度 ポアソン比 $\sim 0.25$

マンツルの密度  $\rho = 3 \text{ g cm}^{-3}$

程度を用いて考える。

– 第一近似として 棒を伝わる縦波 $v_0$ として計算してみよう。

$$100 \text{ GPa} = 100 \times 10^9 \text{ N m}^{-2} \sim 10^{11} \text{ kg m s}^{-2} \text{ m}^{-2} \sim 10^{11} \text{ kg s}^{-2} \text{ m}^{-1}$$

$$\rho = 3 \text{ g cm}^{-3} = 3 \times 10^{-3} \text{ kg cm}^{-3} = 3 \times 10^{-3} \times 10^6 \text{ kg m}^{-3} = 3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{10^{11} \text{ kg s}^{-2} \text{ m}^{-1}}{3 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}}} = 5.7 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} = 5.7 \text{ km/s}$$

– 次に、固体中の縦波、横波として計算する。

$$\text{体積弾性率 } k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} = \frac{E}{3(1-2 \times 0.25)} = \frac{E}{1.5}$$

$$\text{剛性率 } G = \frac{E}{2(1+\sigma)} = \frac{E}{2(1+0.25)} = \frac{E}{2.5}$$

$$\text{縦波 では } v_p = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{9}{7.5} \frac{E}{\rho}} = 1.1 v_0 = 6.3 \text{ km/s}$$

$$\text{横波 では } v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2.5} \frac{E}{\rho}} = 0.6 v_0 = 3.5 \text{ km/s}$$

– 実際の地震縦波(p波) :  $7 \text{ km/s}$  地震横波(s波)  $4 \text{ km/s}$  10%くらいの差があるが、単純モデルであることを考えると、オーダーがあっている。  
p派とs派の比はほぼ再現している。

<<第7講終わり>>

# 弾性体 まとめ地図

できて欲しいこと

E:ヤング率

日本語⇔数式の変換  
それぞれの次元の確認  
具体的な数値を入れた計算

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (2.19)$$

$\sigma$ :ポアソン比 棒を伸ばしたときの縦方向の歪みとその垂直方向の歪みの比。

$$\sigma = -\frac{\Delta b/b}{\Delta \ell/\ell} \quad (2.22)$$

k:体積弾性率 圧力が  $p$  から  $p + \Delta p$  に変化するとき、体積が  $v$  から  $v + \Delta v$  に変化する。

日本語⇔数式の変換  
それぞれの次元の確認

$$\Delta p = -k \frac{\Delta v}{v} \quad (2.20)$$

通常、 $p$  は大気圧。また、 $\kappa = 1/k$  を圧縮率という。

G:剛性率 (ずれ弾性率) 接線応力に対して、角度  $\phi \sim \Delta a/b$  歪む。

$$\frac{F}{S} = G\phi \quad (2.21)$$

2.19、2.22、2.20  
⇒2.23 の導出

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \quad (2.23)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \quad (2.24)$$

● 断面における曲げモーメントを次のように定義する。

$$M = \int f z dS = \frac{E}{R} \int z^2 dS = \frac{E}{R} I \quad (2.3.5)$$

ここで、 $I = \int z^2 dS$  を断面2次モーメントという。

断面の形を与えられた時のIの計算  
Rはどうでもよい。

釣り合いの絵がかけること。  
応力・圧力・張力の概念

たわみ

断面長方形  $f(0) = -\frac{mgl^3}{4a^3bE} \quad (2.3.15)$

断面円  $f(0) = -\frac{mgl^3}{16\pi r^4E} \quad (2.3.18)$

この式を与えられた時に、具体的に数値を入れた計算

固体中の縦波、横波の導出、(2.5.12)(2.5.15)を与えられた時に下記大小を示す。  
数値計算

$$\text{縦波の速さ } (\sqrt{(k + \frac{4}{3}G)/\rho}) > \text{横波の速さ } (\sqrt{G/\rho})$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

## <<第8講>>

### 2.6 流体 (教科書80ページ~)

流体: 気体および液体  
圧縮性流体(気体): 体積が変わる  
非圧縮性流体(液体): 体積が変わらない

静止流体では、法線応力のみが働く(2.6.1節)  
速度差のある、並んで流れる流体では接線応力が働く(2.8節)。→ 粘性  
完全流体: 粘性のない流体。

#### 2.6.1 静止流体の圧力

静止流体中で図2.6.1の三角錐を考える。  
面ABCに垂直な外向き単位ベクトルを $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ とする。

x, y, z方向の釣り合いを考えると

$$p_x S_x = p S n_x = p S_x \quad (2.6.1)$$

$$p_y S_y = p S n_y = p S_y \quad (2.6.2)$$

$$p_z S_z = p S n_z + \rho V g = p S_z + \rho V g = p S_z \quad (V \rightarrow 0) \quad (2.6.3)$$

∴  $p_x = p_y = p_z = p$  → 静止流体中ではどの方向の圧力も等しい。

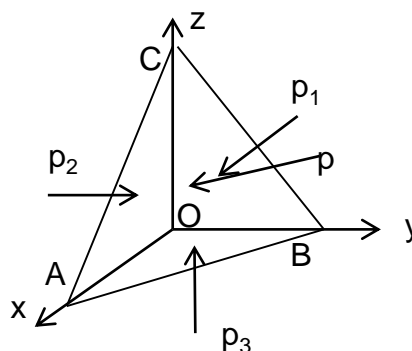


図2.6.1 静止流体の圧力

### 2.6.2 流体中の圧力の深さ依存

流体中に密度  $\rho$ 、底面積  $S$  の直方体を考える。  
 $z$  での圧力を  $p(z)$  とする。

$z$  方向の力の釣り合いを考えて

$$p(z_1)S + \rho Shg = Sp(z_2) \quad (2.6.4)$$

$$h = z_1 - z_2 \quad (2.6.5)$$

よって

$$p(z_1) + \rho gz_1 = p(z_2) + \rho gz_2 = p(z) + \rho gz = \text{const} \quad (2.6.6)$$

液面 ( $z=0$ ) での圧力を  $p_0$  とすると、

$$p(z) = p_0 - \rho gz \quad (2.6.7)$$

を得る。

### 2.6.3 パスカルの原理

密閉した容器中の流体の一点で圧力を増すと他のすべての点での圧力が増加する。

図で  $z=z_0$  で断面積  $S$  に力  $F$  を加える。

$$p(z_0) = F/S \quad (2.6.8)$$

(2.6.7) 式を使って、

$$p(z) = \frac{F}{S} - \rho gz \quad (2.6.9)$$

力  $F$  を  $F + \Delta F$  に増加した時の圧力  $p'$  は

$$p'(z) = \frac{(F + \Delta F)}{S} - \rho gz = p(z) + \frac{\Delta F}{S}$$

となり、圧力の増加分は深さに寄らない。

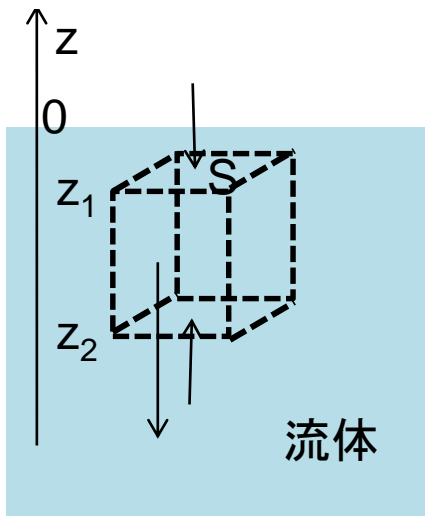


図2.6.2 流体中の圧力の深さ依存

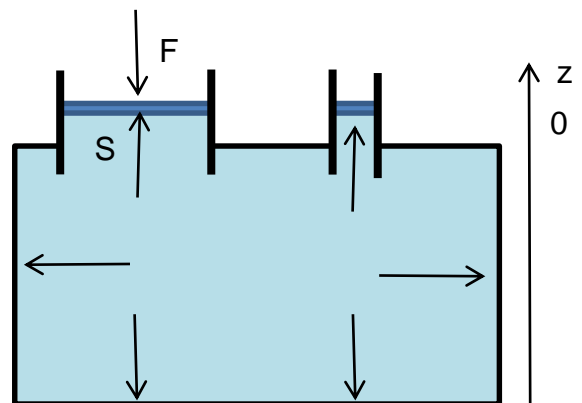


図2.6.3 パスカルの原理

#### 2.6.4 アルキメデスの原理

物体の全部または一部が液中にある時、液面以下の部分の体積の重量に等しい浮力が働く。

(説明) 液中にある物体は圧力を受ける。  
圧力による力は表面の形が等しければ等しい。

物体のかわりに流体があることを考える。  
つり合いを考えると、  
 $F = \rho V g$  となり、アルキメデスの原理が示される。

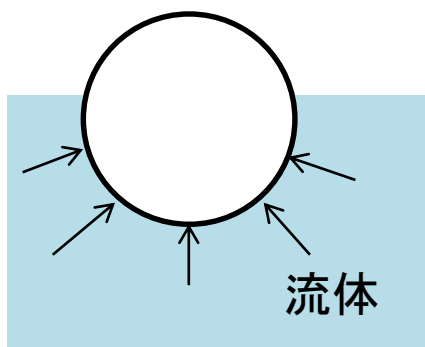


図2.6.4 アルキメデスの原理



### 2.6.5 気圧の高度依存

地上の空気が理想気体でTが一定を仮定

$$pV = nRT \quad (2.6.10)$$

および

$$\rho = M/V \propto n/V \quad (2.6.11)$$

より

$$\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} = \text{const} \quad (2.6.12)$$

$z + dz$ での圧力を $p + dp$ とする。(2.6.6)より、

$$p + dp + \rho g(z + dz) = p + \rho g z \quad (2.6.13)$$

$$\therefore dp = -\rho g dz \quad (2.6.14)$$

(2.6.12)と合わせて、

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} p g dz \quad (2.6.15)$$

$$\therefore \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dz \quad (2.6.16)$$

0からzまで積分して、

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{\rho_0}{p_0} g dz \quad (2.6.17)$$

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z \quad (2.6.18)$$

$$\therefore \frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z\right) \quad (2.6.19)$$

よって

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z\right) \quad (2.6.20)$$

## 2.7 完全流体

定常流 流体が運動していて、空間の各点で流速 ( のベクトル ) が時間的に変化しないとき、定常流という。

流線と流管 各点の速度ベクトルが接線となる曲線を流線という。また、ある閉曲線の各点から流線をひくと、一つの管ができ、これを流管という。定常流では流線や流管は変化しない。

連続の式 流体の密度を  $\rho$ 、ある流管の断面を  $S$ 、流速を  $v$  とすると、次の式が成り立つ。

$$\rho S v = \text{const.} \quad (2.7.1)$$

これは流体の質量保存を表している。次元を考えると何が一定になるかの感覚がつかめる。

### 2.7.1 ベルヌイの定理

密度  $\rho$  が一定の完全流体では以下の式が成り立つ

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{const} \quad (2.7.2)$$

(説明) A~B間の流体がされる仕事が、運動エネルギーと位置エネルギーの和の変化に相当する。

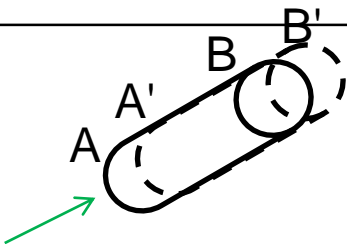
$$\begin{aligned} & p_A S_A v_A \Delta t - p_B S_B v_B \Delta t \\ &= \frac{1}{2} \rho_B V_B v^2 + V_B \rho_B g z_B - \left( \frac{1}{2} \rho_A V_A v^2 + V_A \rho_A g z_A \right) \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

$$V_A = S_A v_A \Delta t \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B = \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A \quad (2.7.4)$$

すなわち、

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.} \quad (2.7.5)$$



$\Delta t$ の間にAB(実線)のものがA'B'(破線)に移動した、と考える。  
 圧力のした仕事はA面で2.7.3左辺第一項  
 B面で2.108左辺第二項 となる。

図2.7.1 ベルヌイの定理

左辺: 矢印の向きに圧力のした仕事。  
 右辺: 増えた分(B~B'間)の持つ運動+位置エネルギー - 減った分(A~A'間)の持つ分

• 例題8-1 水中での圧力を論ぜよ

– 水深100mでの圧力は 2.6.7 式に $z=-100\text{m}$ を代入して、

$$p(z) = p_0 - \rho g z = p_0 + 10^3 \text{kg m}^{-3} g 100\text{m} = p_0 + 10^5 \text{kg m}^{-2} g$$

大気圧が  $1 \text{kg cm}^{-2} = 10^4 \text{kg m}^{-2}$ であることを考えると、 $p_0 = 10^4 \text{kg m}^{-2} g$

よって  $p(100\text{m}) = 11p_0$  となり、大気圧の11倍の圧力がかかることが分かる。

直感的には、「1cm角の上につかっている水の重さ」を考えればよい。

<<第8講終わり>>

## <<第10講>>

### 2.7.1 ベルヌイの定理の応用

#### トリチェリの定理

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho gh \quad (2.7.6)$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2.7.7)$$

ベンチュリ管 断面積の違う断面  $A, B$  で圧力差を測ると、流量が求まる。

$z_A = z_B$  として、

既知量:  $S_A, S_B, P_A, P_B$

$$S_A v_A = S_B v_B = Q \quad (2.7.8)$$

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B \quad (2.7.9)$$

であり、 $v_A = Q/S_A, v_B = Q/S_B$  を代入して

ベルヌイの定理から。

$$\frac{1}{2}\rho \left\{ \left( \frac{Q}{S_B} \right)^2 - \left( \frac{Q}{S_A} \right)^2 \right\} = p_A - p_B \quad (2.7.10)$$

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} / \left( \frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right)} \quad (2.7.11)$$

$$= S_A S_B \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \quad (2.7.12)$$

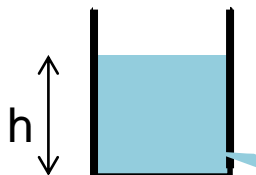


図2.7.2 トリチェリの定理

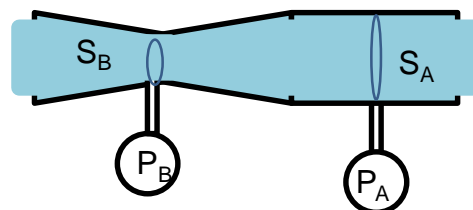


図2.7.3 ベンチュリ管

ピトー管  $v_A = 0$  となる淀み点があると、

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

流れに垂直に圧力を測定すると、「風圧」を感じる。これから風量を測定可能。(2.7.13)

から、流速  $v_B$  を求められる。

$$v_B = \sqrt{2(p_A - p_B)/\rho} \quad (2.7.14)$$

揚力 飛行機の翼の上面の流速が密になると、流速  $v$  は大きくなる。 $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$  であるから、圧力  $p$  は上面のほうが小さくなる。よって、全体として上向きの揚力が生じる。

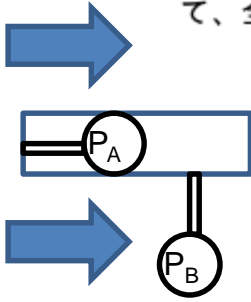


図2.7.4 ピトー管

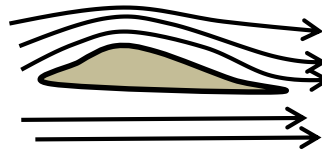


図2.7.5 揚力

## 2.8 粘性流体

流体は粘性を持つ。接線応力が流体の速度勾配に比例し、

$$f = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.8.1)$$

とあらわされる。 $\eta$ を粘性率と言い、単位は $[\text{N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}]$ 。

♣粘性流体の従う方程式をナビエ-ストークスの方程式という。

物質の $\eta$  [ $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]

空気  $2 \times 10^{-5}$

水  $1 \times 10^{-3}$

グリセリン 1.5

### ハーゲンポアズイユの法則

半径  $a$ 、長さ  $\ell$  の細い円管を粘性率  $\eta$  の流体が静かに定常的に流れる。両端での圧力を  $p_1, p_2 (p_1 > p_2)$  とすると、流速を中心からの距離  $r$  の関数として求められる。更には流量も決まる。

流速を  $v = v(r)$  とする。粘性により  $v(a) = 0$  である。 $r \sim r + dr$  の円筒部分を考えると、接線応力と力は次のようになる

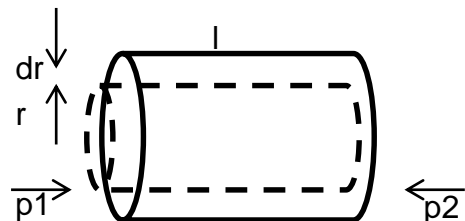
$$f = -\eta \frac{dv}{dr} \quad (2.8.2)$$

$r$ で働く力の積分値  $F = 2\pi r \ell f = -2\pi \eta \ell r \frac{dv}{dr} \quad (2.8.3)$

$r \sim dr$ で働く力の積分値  $dF = F(r + dr) - F(r) \quad (2.8.4)$

$$= \frac{dF}{dr} dr \quad (2.8.5)$$

$$= -2\pi \eta \ell \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) dr \quad (2.8.6)$$



両端の圧力との釣り合いを考えて、

$$2\pi r dr p_1 = 2\pi r dr p_2 - 2\pi\eta\ell \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) dr \quad (2.8.7)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{p_1 - p_2}{\eta\ell} r \quad (2.8.8)$$

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r^2 + C \quad (2.8.9)$$

$r = 0$  を代入して  $C = 0$ 。よって、

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta\ell} r \quad (2.8.10)$$

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} r^2 + D \quad (2.8.11)$$

境界条件  $v(a) = 0$  から、

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} (a^2 - r^2) \quad (2.8.12)$$

これを積分することで流量が求まる。

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a 2\pi r v(r) dr \\ &= \int_0^a 2\pi r \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell} (a^2 - r^2) dr \\ &= \frac{\pi a^4}{8\eta\ell} (p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (2.8.13)$$

## 流体の抵抗

流体のなかにある半径  $a$  の球は流速  $v$  が小さいとき流体から

$$F = 6\pi\eta av \quad (2.8.14)$$

の力を受ける。完全流体の場合は力を受けない。このことから、水や空気も粘性を持つことがわかる。

流速  $v$  が大きくなると物体の後方に渦ができる。このときは流体の圧力によって力（圧力抵抗）が生じ、その大きさは

$$D = C_D \rho v^2 S \quad (2.8.15)$$

$S$  は最大断面積。 $C_D$  は無次元数で抵抗係数と呼ばれ、物体の形と次に述べるレイノルズ数で決まる。

2.8.14式を  $mg$  とつりあわせることで、雨の終端速度を計算可能

## レイノルズ数と相似法則

レイノルズ数は無次元で、 $\ell$  を流れを特徴づける長さとして

$$R = \frac{\rho v \ell}{\eta} \quad (2.8.16)$$

と定義される。 $\rho v \ell$  の次元は  $(ML^{-3})(LT^{-1})(L) = ML^{-1}T^{-1}$ 。 $\eta$  の次元は  $f/(dv/dy)$  の次元だから、 $(MLT^{-2})(L^{-2})/(LT^{-1}/L) = ML^{-1}T^{-1}$  なので、確に  $R$  は無次元の量である。。

きれいな流線を持つ流れを層流、入り乱れた流れを乱流という。レイノルズ数が小さい値から大きい値に変化させると、あるところで層流から乱流に切り替わる。

レイノルズ数が等しい流れは相似になる：レイノルズの相似法則。

<<第10講終わり>>



# • 流体 まとめ地図

できて欲しいこと

連続の式

$$\rho Sv = \text{const.}$$

いたるところで使う。  
この式は覚えておこう。

$$(2.7.1)$$

ベルヌーイの定理

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz + p = \text{const.}$$

日本語⇒絵を書く⇒運動方程式  
それぞれの次元の確認  
式を暗記する必要はなし

$$(2.7.2)$$

トリチェリの定理

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho gh$$

$$(2.7.6)$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$(2.7.7)$$

ベルヌーイの定理の応用3部作  
日本語⇒絵を書く  
定理からの導出  
具体的な数値を代入

ベンチュリ管

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} / \left( \frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right)} \quad (2.7.11)$$

$$= S_A S_B \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \quad (2.7.12)$$

ピトー管

$$v_B = \sqrt{2(p_A - p_B)/\rho}$$

$$(2.7.14)$$

粘性の式

$$f_x = \eta \frac{dv}{dy}$$

$$(2.8.1)$$

ハーゲンポアズイユの法則

$$Q = \int_0^a 2\pi r v(r) dr$$

$$= \int_0^a 2\pi r \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (a^2 - r^2) dr$$

$$= \frac{\pi a^4}{8\eta l} (p_1 - p_2)$$

$$(2.8.13)$$

日本語⇒絵を書く  
運動方程式を立てる  
具体的な数値を代入

## 第3章 熱力学

### 3.1 ボイル・シャルルの法則と状態方程式

経験的溫度：水の融点を $0^{\circ}\text{C}$ 、沸点を $100^{\circ}\text{C}$ とした。(1気圧)  
絶対零度： $0\text{K}$  (ケルビン)  $= -273.15^{\circ}\text{C}$

ボイルの法則 温度が一定の時、気体の圧力を  $P$ 、体積を  $V$  とすると

$$PV = \text{const.} \quad (3.1.1)$$

シャルルの法則 圧力が一定の時、気体の体積は絶対温度  $T (= t + 273.15)$  に比例する。

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad (3.1.2)$$

ボイルシャルルの法則 上の二つの法則を組み合わせると、

$$\frac{PV}{T} = \text{const.} \quad (3.1.3)$$

今日の講義を聞くと、「温度=分子の運動」という概念がわかるはず。

ボイルシャルルの関係が厳密に成立する気体を理想気体という。1モルの理想気体、 $n$ モルの理想気体の方程式はそれぞれ

Rの次元を考えてみよう。下の単位と合うか？

$$PV = RT \quad (3.1.4)$$

$$PV = nRT \quad (3.1.5)$$

化学で散々出てきた式

R気体定数  $8.31\text{J/mol}\cdot\text{K}$

実在気体の状態方程式はつぎのように書ける。

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (3.1.6)$$

これをファンデルワールス方程式という。

$V' = V - b$ ：これは、気体分子が体積を持つことによる効果。

$P' = P + a/V^2$ ：これは分子間力による効果。

また、気体定数をアボガドロ数 ( $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ ) で割ったものをボルツマン定数という。

kの次元はケルビンが残る。  
kTの次元がエネルギーとなる。

$$k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (3.1.7)$$

ボルツマン定数を使って、理想気体の状態方程式を次のように書くこともできる。

$$PV = NkT \quad (3.1.8)$$

$$P = N_0 kT \quad (3.1.9)$$

ここで  $N$  は気体の分子数。  $N_0 = N/V$  は単位体積あたりの気体分子数。

熱平衡：2つ以上の物体を接触させた時、状態が変わらなくなった時熱平衡状態にあるという。

### 3.2 気体の分子運動論

簡単のため、一辺の長さ  $L$  の立方体の箱に閉じ込められた気体の運動を考える。ある気体分子の速度ベクトルを

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (3.2.1)$$

とする。 $x$  軸に直交する壁に衝突する周期  $T$  は

$$T = \frac{2L}{v_x} \quad (3.2.2)$$

気体分子が壁に衝突すると、その運動量変化は

$$\Delta p = (-mv_x) - mv_x = -2mv_x \quad (3.2.3)$$

よって、気体分子が壁から単位時間に受ける力積は、

$$f_x^{particle} \times 1 = \frac{\Delta p}{T} = \frac{-2mv_x}{2L/v_x} = -\frac{mv_x^2}{L} \quad (3.2.4)$$

となる。その反作用として、壁はひとつの気体分子から次の力を受ける。

$$f_x^{wall} = -f_x^{particle} = \frac{mv_x^2}{L} \quad (3.2.5)$$

$N$  個の気体分子があれば、その合力は

$$F_x = \sum_{i=1,N} \frac{mv_{x,i}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_{i=1,N} v_{x,i}^2 \quad (3.2.6)$$

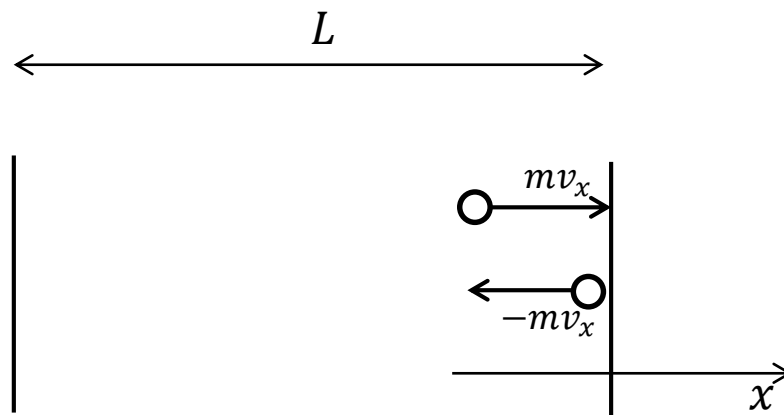


図3.2.1 気体分子運動論

ここで速度の自乗の平均値を考える。平均を  $\langle \rangle$  で表すことにする。

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} v_{x,i}^2 \quad (3.2.7)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (3.2.8)$$

なので、 $v_x, v_y, v_z$  の対称性から、

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \quad (3.2.9)$$

よって、壁が気体から受ける力は

$$F = F_x = F_y = F_z = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3L} \quad (3.2.10)$$

圧力にすると、

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3L^3} = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3V} \quad (3.2.11)$$

よって、

$$PV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} N \times \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle \quad (3.2.12)$$

ここで、 $\frac{1}{2}mv^2$  は気体分子の運動エネルギーである。 $N = nN_A$  として、状態方程式と比較する。

$$PV = n \frac{2}{3} N_A \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = nRT \quad (3.2.13)$$

よって、

この比較が重要。

$$T = \frac{2}{3} \frac{N_A}{R} \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle \quad (3.2.14)$$

$$\left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT \quad (3.2.15)$$

すなわち、**気体の温度  $T$  は気体分子の平均運動エネルギーに比例する。**ただし、ここまでの議論で気体分子同士の相互作用は無視している（理想気体）。

「気体分子運動論」の要となる概念

気体分子の速度は一定ではなく、分布を持っている。 $f = f(v_x, v_y, v_z)$  を速度分布関数 (確率密度関数) とすると、

$$dN = N f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (3.2.16)$$

速度 $v$ を持つ分布関数に関して

$$f(v) = f_1(v_x) f_1(v_y) f_1(v_z) \quad (3.2.17)$$

となる。(3.2.8)および (3.2.17) 式から、Maxwellは速度分布関数を求めた。

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{2}mv^2/kT\right) \quad (3.2.18)$$

これを Maxwell の速度分布関数とよび (Maxwell の速度分布則)、速度ベクトルの大きさだけの関数である。この分布関数を使うと、体積の積分を $dx dy dz$ から球殻に変えた

$$dN = N f(v) 4\pi v^2 dv \quad (3.2.19)$$

と書き ( $f(v_x, v_y, v_z) = f(v)$ ,  $dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv$ )、速度の自乗の平均値を求めると、

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 dN \quad (3.2.20)$$

$$= 4\pi \int_0^\infty f(v) v^4 dv = \frac{3kT}{m} \quad (3.2.21)$$

3.2.15と一致。

となり、理想気体の運動エネルギーと温度の関係を再現する。

(注) 上の式の計算を行うには、部分積分を繰り返しおこない、最後に誤差関数の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx = \sqrt{2\pi} \quad (3.2.22)$$

を利用すればよい。

熱平衡：2つ以上の物体を接触させた時、状態が変わらなくなった時熱平衡状態にあるという。

熱平衡状態に理想気体では分子の速度分布はMaxwell分布に従う。

### MAXWELL分布の例

T=1

T=2

$$\frac{dN}{N} = A\left(\frac{B}{T}\right)^{3/2} e^{-(Cv^2/T)} v^2 dv$$

に関して、A=B=C=1として、Tとvの関係を見た。  
vがあるところに分布のピークをもつ  
Tが大きくなるとピークは大きい方に移動する。

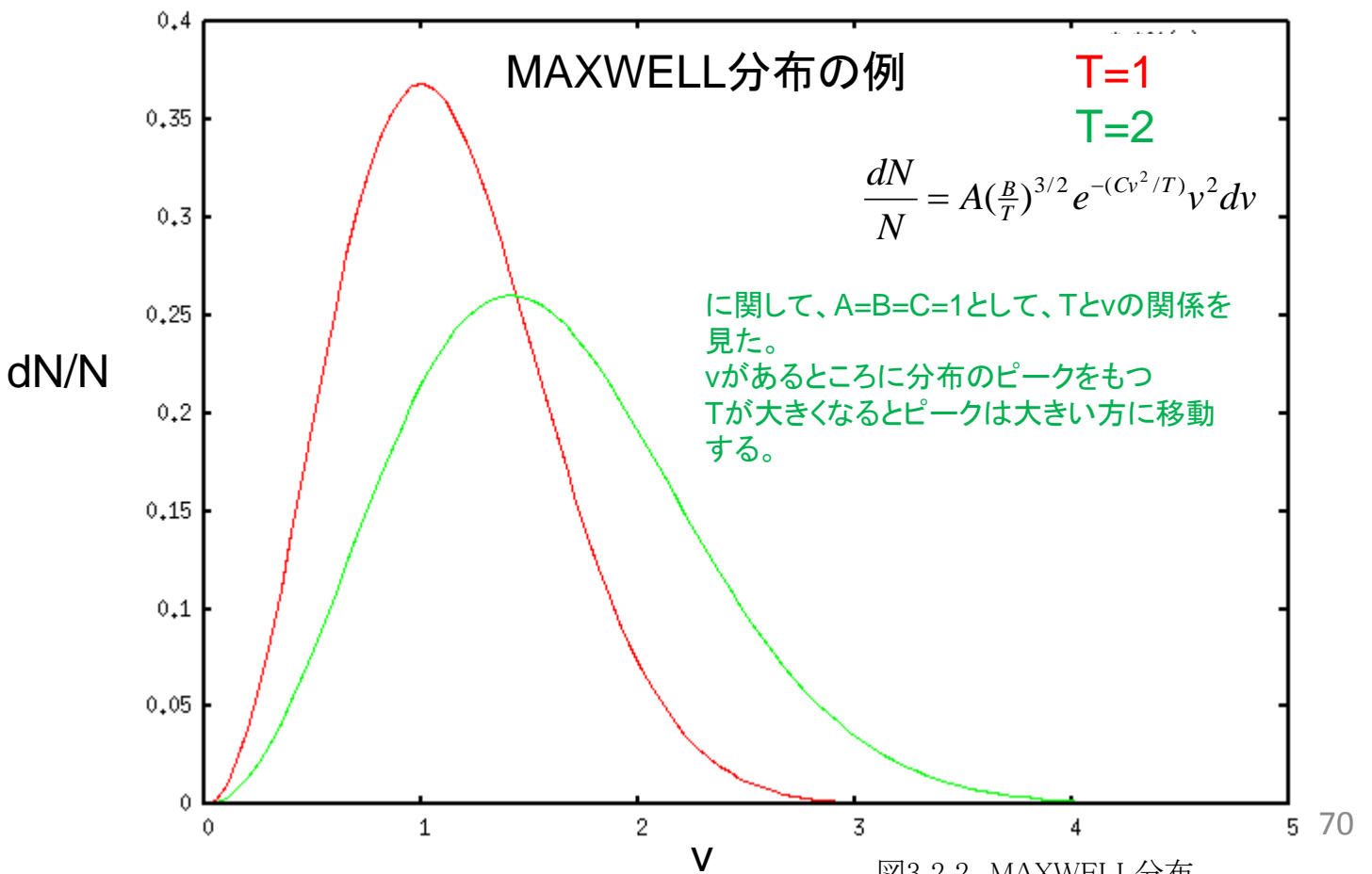


図3.2.2 MAXWELL分布

- 例題11-1 気体の状態方程式に適当な値を代入して、気体定数 $R$ を求めよ。

– 1モルの理想気体は1気圧、摂氏0度で22.4リットルである。

$$R = \frac{PV}{T} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 22.4 \times 10^{-3}}{273.15} = 8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

- 例題11-2 気体分子の運動速度を論ぜよ

– 3.2.15式より、 $\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$  より、 $\langle v^2 \rangle = \frac{3RT}{mN_A}$

$$300\text{K} \text{ の水素分子については } \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 300}{0.002}} = 2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$280\text{K} \text{ の窒素分子については } \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 \times 8.31 \times 280}{0.028}} = 5 \times 10^2 \text{ m/s}$$

<<第11講終わり>>



## <<第12講>>

### 3.3 熱力学第一法則

#### 熱力学第一法則

#### 3.3.1 熱力学第一法則

「系に熱量 $Q$ と仕事 $W$ を加えると内部エネルギーが $W + Q$ 増加する。」

$$\Delta U \equiv U_2 - U_1 = W + Q \quad (3.3.1)$$

内部エネルギー: 系の持つエネルギーから、運動、位置エネルギーを引いたもの

$\Delta U$ : 内部エネルギーの増加分

$U_2$ : 終状態での内部エネルギー

$U_1$ : 始状態での内部エネルギー

$Q, U, W$ の定義をしっかりと把握して進もう。

#### 3.3.2 状態量

「系の状態だけで決まる量」

圧力、温度、体積、内部エネルギー : 状態量

仕事、熱量: 状態量でない。(外部とのやり取りするもの)

仕事、熱量は状態量でないが、組み合わせで状態量となりうる。(3.3.1)式

### 3.3.3 準静的過程

「温度、体積、圧力などの変化を熱平衡を保ちながらゆっくりと行う過程」

(例) 気体の圧縮・膨張

断面積 $S$ のシリンダーに圧力 $P$ の気体を入れる。  
 $\Delta x$ だけ圧縮する時に、外から気体にする仕事は

$$\Delta W = F\Delta x = PS\Delta x = -P\Delta V \quad (3.3.2)$$

収縮時:系になされる仕事は正  
膨張時:系になされる仕事は負

### 3.3.4 微小過程についての第一法則

(3.3.2)式は微分形で書くこともできて

$$\delta W = -PdV \quad (3.3.3)$$

とあらわせる。

$d$ で状態量の微小変化  
 $\delta$ で非状態量の微小変化 を表す。

(3.3.1)は

$$dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q \quad (3.3.4)$$

ともあらわせる。

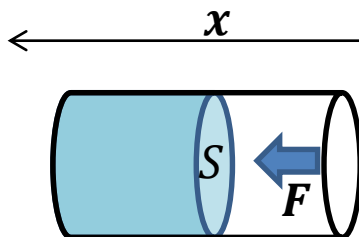


図3.3.1 気体の圧縮と仕事

### 3.3.5 一般的な状態変化での仕事

気体のされる仕事を、 $P - V$ 図で考える。(変化のさせ方はいろいろ取れる。)

(3.3.3)式より、微小部分の仕事は $-PdV$  (: 図の斜線部)

$$W = \int \delta W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (3.3.5)$$

(状態1から状態2への変化は曲線とV軸とで囲まれた面積になる。)

この面積は曲線の形でいろいろ決まる。よって、仕事 $W$ は状態量でない。

### 3.3.6 気体の内部エネルギーと温度 ♠

(3.25)式より1モルの理想気体の内部エネルギーは

$$U = N_A \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} RT \quad (3.3.5)$$

とあらわされ、 $T$ のみであらわすことができる。

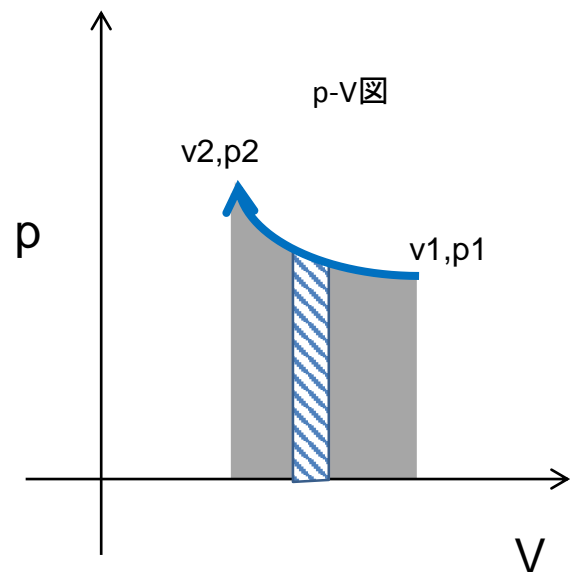


図3.3.2  $P - V$  図と仕事

## 3.4 比熱と熱サイクル

### 3.4.1 比熱

熱容量 $C$ :ある物体の温度を1K上げるのに必要な熱量(エネルギー)。

$$C = \delta Q/dT \quad (3.4.1)$$

比熱 $c$ :単位量(質量やモル)の物質の熱容量。

$$c = \delta Q/dT \quad (3.4.2)$$

(3.4.2)は単位量の物質について成立。

以下、特記しない限り、単位量の物質について議論する。

### 3.4.2 内部エネルギーの微分表記

状態方程式によって、 $P, V, T$ のうちで独立なものは2つ。

$$U = U(T, V) \quad (3.4.3)$$

とする。微分の定義から

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \quad (3.4.4)$$

と書けるので、

$$\begin{aligned} d'Q &= dU + PdV \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left\{P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right\} dV \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

## 3.4 比熱と熱サイクル

### 3.4.3 等積比熱 $c_v$

「体積を一定にした時の比熱」

(3.3.4)式に $dV = 0$ を適用

$$\delta Q = dU \quad (3.4.6)$$

$$c_v = \delta Q / dT = (dU / dT)_V \quad (3.4.7)$$

添字VはVを一定にしていることを示す。  
UがTのみの関数であることから、一般化して、

$$dU = c_v dT \quad (3.4.7')$$

とかける。

### 3.4.4 等圧比熱 $c_p$

「圧力を一定にした時の比熱」

(3.25)式などより、理想気体では、UはTだけの関数なので、(3.4.7)より

$$dU = c_v dT \quad (3.4.8)$$

(3.3.4)式より、

$$\delta Q = dU + p dV = c_v dT + p dV \quad (3.4.9)$$

圧力一定では

$$c_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p = c_v + p \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (3.4.10)$$

状態方程式より、

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{P} \quad (3.4.11)$$

故に

$$c_p = c_v + R \quad (3.4.12)$$

一般に $c_p > c_v$ で

$$\gamma \equiv c_p / c_v \quad (3.4.13)$$

を気体の比熱比という

### 3.4.5 等温過程

「温度を一定にして膨張・圧縮させる」

理想気体では、

$$PV = \text{const}$$

(3.4.14)

$$P \propto V^{-1}$$

(3.4.15)

### 3.4.6 断熱過程

「外界と熱のやり取りをせず膨張・圧縮させる」

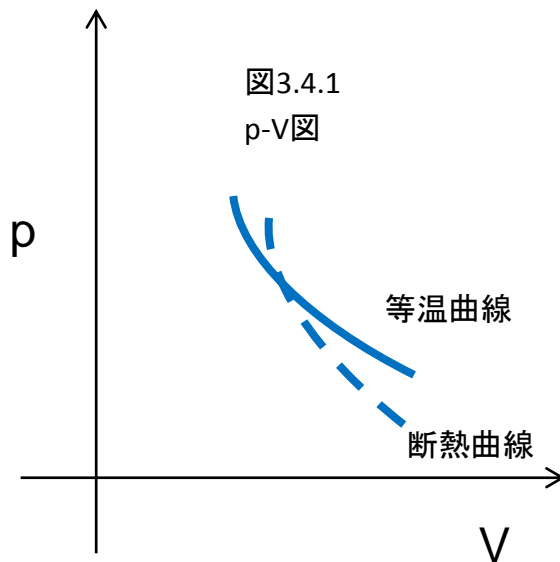
理想気体では

$$PV^\gamma = \text{const}$$

(3.4.16)

$$\gamma \equiv c_p/c_v$$

(3.4.13)



一般に断熱過程の方が傾きが急になる。3.4.14と3.4.13を $p=V^\alpha$ の形にして、微分するとわかる。

(3.4.16)式の導出 (1モルの理想気体を考える)

断熱過程なので  $\delta Q = 0$  (3.4.17)

(3.3.4)と(3.4.7) から  $\delta Q = dU - \delta W = c_v dT + P dV$  (3.4.18)

よって  $dT = -\frac{P}{c_v} dV$  (3.4.19)

状態方程式と合わせて

$$d(PV) = P dV + V dP = R dT = -\frac{RP}{c_v} dV \quad (3.4.20)$$

変形して

$$\frac{c_v + R}{c_v} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \quad (3.4.21)$$

積分して  $\gamma \log V + \log P = \log V^\gamma + \log P = \log PV^\gamma = \text{const}$  (3.4.22)

よって(3.4.16)を得る。

- 例題12-1



## <<第13講>>

### 3.4.7 カルノーサイクル

等温過程と断熱過程の組み合わせでサイクルを作る。

熱 → 仕事の変換。この効率を議論する。

1モルの気体、熱源  $T_1, T_2 (T_1 > T_2)$

Q: 気体に与えた熱量

W: 気体に与えた仕事

U: 気体の内部エネルギー

A → B (等温過程)

$$\Delta U = Q_1 + W_1 = 0 \quad (3.4.23)$$

$$W_1 = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_1}{V} dV = - RT_1 \log V_B / V_A \quad (3.4.24)$$

よって

$$Q_1 = -W_1 = RT_1 \log V_B / V_A \quad (3.4.25)$$

B → C (断熱過程)

$$(3.4.16) \text{ より} \quad P = aV^{-\gamma} \quad (3.4.26)$$

$$W_2 = - \int_{V_B}^{V_C} P dV = - \int_{V_B}^{V_C} aV^{-\gamma} dV = - \frac{a}{1-\gamma} (V^{1-\gamma}_C - V^{1-\gamma}_B)$$

$$= - \frac{1}{1-\gamma} (P_C V_C - P_B V_B) = - \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) \quad (3.4.27)$$

$$Q_2 = 0 \quad (3.4.26)$$

C → D (等温過程)

$$W_3 = -RT_2 \log(V_D/V_C) = -RT_2 \log(V_B/V_A) \quad (3.4.27)$$

よって

$$Q_3 = -W_3 = -RT_2 \log V_B / V_A \quad (3.4.28)$$

但し、断熱過程でなりつつ

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1} \quad (3.4.29)$$

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1} \quad (3.4.29)$$

から得られる

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \quad (3.4.30)$$

を用いた。

D → C (断熱過程)

$$W_4 = \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2) \quad (3.4.31)$$

$$Q_4 = 0 \quad (3.4.32)$$

以上より

1サイクルで気体のされる仕事Wは

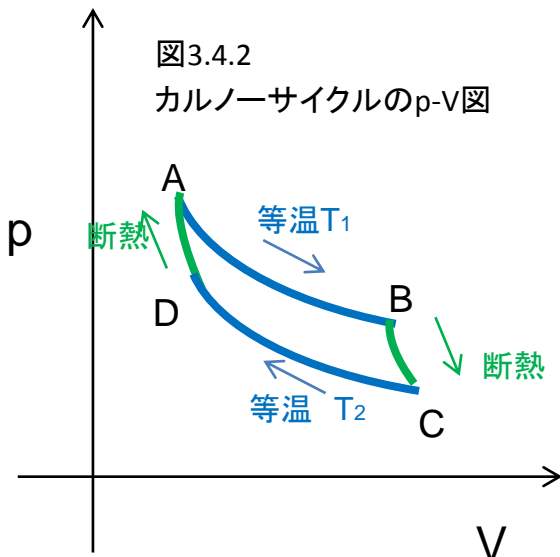
$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = -R(T_1 - T_2) \log V_B/V_A \quad (3.4.33)$$

絶対値をとることで気体のした仕事と考えることができる。

気体に与えた熱量は $Q_1$ なので効率

$$\frac{|W|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (3.4.34)$$

$T_2 > 0$ である限り、受け取った熱量 $Q_1$ のすべてを仕事に変換することはできない。  
熱機関の効率 $< 100\%$



さまざまな機関の熱効率の例

蒸気機関	10~20%
ガソリン機関	20~30%
ガスタービン	20~40%
ディーゼル機関	30~40%

<<第13講終わり>>

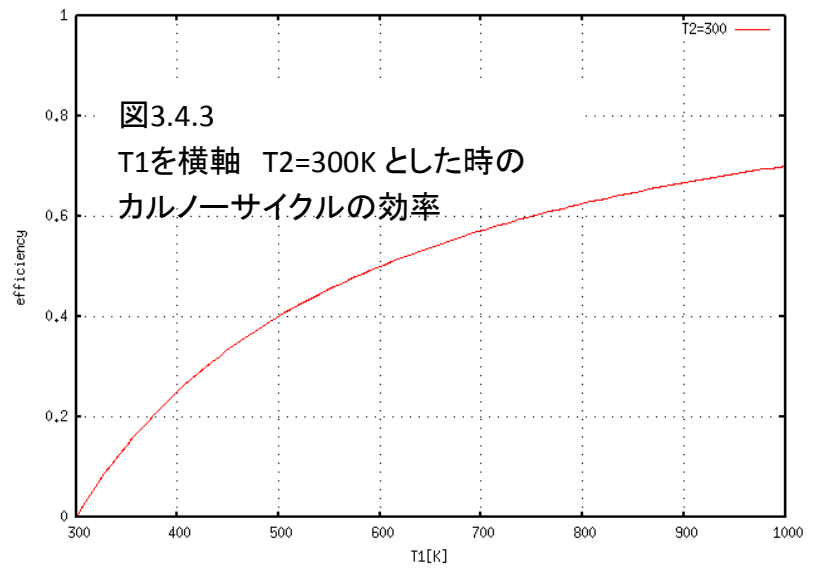
• 例題12-1

カルノーサイクルの熱効率について論ぜよ。

(解答例)カルノーサイクルの熱効率は  $\frac{|W|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

T2として現実的な300Kを仮定した時の検出効率のT1依存を右に示す。

T2=600Kの時効率0.5となる。



## <<第14講>>

### 3.5 熱力学第二法則・エントロピー

#### 3.5.1 熱力学の第二法則

不可逆過程 : 一方通行の過程: 外部に何の変化も残さずに逆行させることはできない。  
熱現象には不可逆なものが多い。

例 温度の異なる気体や液体の混合  
運動する物体の摩擦による停止

一般に準静的過程(ゆっくりと・熱平衡を保ちながら)では可逆。  
カルノーサイクルは可逆

#### 熱力学の第二法則

クラウジウスの表現[C]: 他に何らかの変化も残さず、熱を低温から高温に移せない。

トムソンの表現[T]: 他に何らかの変化も残さず、1つの熱源からとった熱を全部仕事に変えることはできない。

プランクの表現 $\clubsuit$ : 摩擦により熱が発生する現象は不可逆。

[C]と[T]は等価である。( [T] $\Rightarrow$ [C] かつ [C] $\Rightarrow$ [T] )

[C]が成り立たなければ[T]が成り立たない。( [T] $\Rightarrow$ [C]の対偶)。

[T]が成り立たなければ[C]が成り立たない。( [C] $\Rightarrow$ [T]の対偶)。

## カルノーの定理

### 熱機関の効率

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} \leq \eta_0 = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (3.5.1)$$

ここで $\eta_0$ はカルノーサイクルの効率。可逆過程の時に等号成立。

## クラウジウスの定理：熱力学第二法則の定式化

可逆過程では、(3.4.25)と(3.4.28)より

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad (3.5.2)$$

(Qは、これまで同様気体に熱を与えた場合を正とする。) 一般化して、

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} = 0 \text{ (可逆)} \\ < 0 \text{ (不可逆)} \end{array} \quad (3.5.3)$$

さらに連続化して、

$$\left. \oint \frac{\delta Q}{T} \right\} \begin{array}{l} = 0 \text{ (可逆)} \\ < 0 \text{ (不可逆)} \end{array} \quad (3.5.4)$$

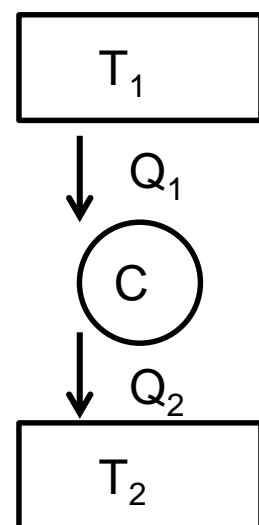


図3.5.1  
熱機関での温度、熱の定義

クラウジウスの定理が熱力学第二法則の定式化であることの説明

図3.5.2 のような機関を考える。

サイクルC : もらった熱量 $\sum Q_i$  された仕事 $W$

$$\text{サイクルなので、} \quad \sum Q_i + W = 0 \quad (3.5.5)$$

可逆サイクル $C_i$ : もらった熱量  $Q'_i - Q_i$  された仕事 $W_i$

$$\text{サイクルなので、} \quad Q'_i - Q_i + W_i = 0 \quad (3.5.6)$$

$$\text{全体を考えると} \quad \sum Q'_i + (W + \sum W_i) = 0 \quad (3.5.7)$$

サイクルから取り出せる仕事は

$$-(W + \sum W_i) = \sum Q'_i \quad (3.7.8)$$

ここで $\sum Q'_i > 0$  だと熱を受けてすべて仕事に変換したことになる。

熱力学第二法則を考えると、

$$\sum Q'_i \leq 0 \quad (3.5.9)$$

Cを可逆として、逆サイクルを考えると

$$\sum Q'_i \geq 0 \quad (3.5.10)$$

よって

$$\sum Q'_i = 0 \quad (3.5.11)$$

Cが不可逆では

$$\sum Q'_i < 0 \quad (3.5.12)$$

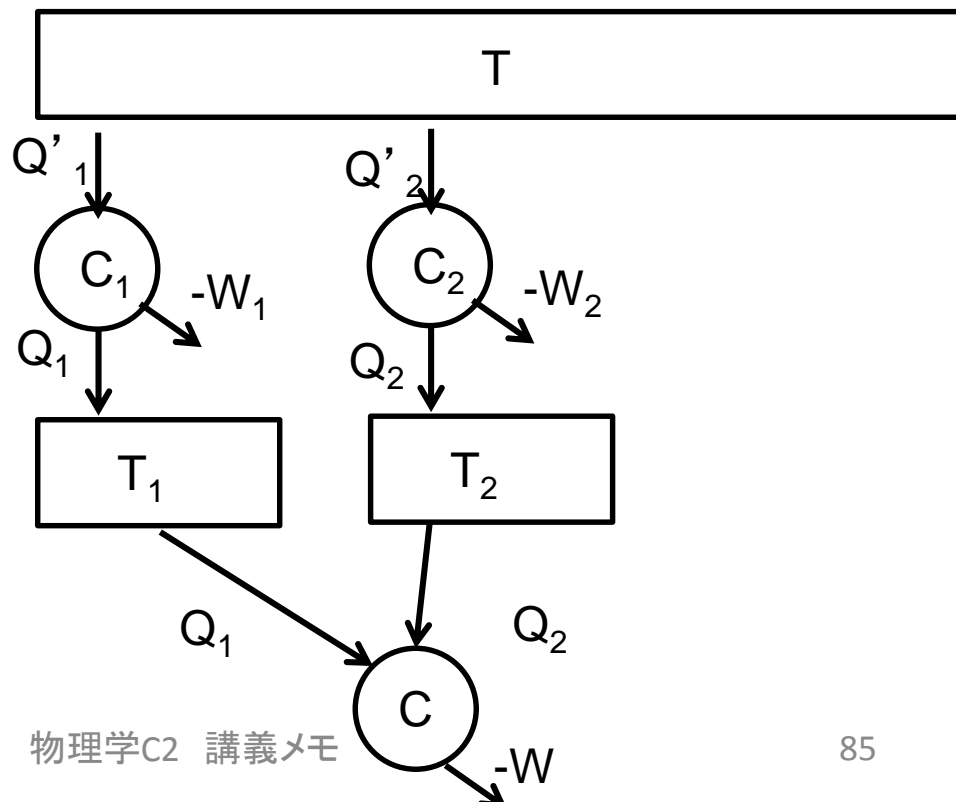


図3.5.2  
クラウジウスの定理

$C_i$ は可逆サイクルなので、(3.5.2)より

$$\frac{Q'_i}{T} + \frac{-Q_i}{T_i} = 0 \quad (3.5.13)$$

よって  $\frac{Q'_i}{T} = \frac{Q_i}{T_i}$  (3.5.14)

$$\sum \frac{Q'_i}{T} = \sum \frac{Q_i}{T_i} \quad (3.5.15)$$

$C$ が可逆サイクルでは(3.5.11)及び(3.5.12)より、

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \begin{cases} = 0 & (\text{可逆}) \\ < 0 & (\text{不可逆}) \end{cases} \quad (3.5.3)$$

を得る。

### 3.5.2 エントロピー

エントロピー $S$ (不可逆過程の方向を決めるパラメータ)

閉じた系で不可逆過程が起きるとエントロピーは増大する。

=不可逆過程はエントロピーが増大する方向に進む。

状態 $i$ から $f$ への変化でのエントロピーの変化を

$$\Delta S = S(f) - S(i) = \int_i^f \frac{\delta Q}{T} \quad (3.5.16)$$

と定義する。

この値は、可逆過程ならば経路に依存しない。

3.5.2なども参考に。

→ エントロピーは状態量。



カルノーサイクルで  $A \rightarrow B \rightarrow C$  という経路と  $A \rightarrow D \rightarrow C$  という経路を考えると、

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (3.5.17)$$

の関係がある。ここで  $Q_1$ 、 $Q_2$  はそれぞれの経路で入ってくる熱量。一般に、 $A \rightarrow C$  の変化があるとき、経路を小さなカルノーサイクルの積み重ねと考えると、以下の積分量は経路によらない。

$$S(C) - S(A) = \int_A^C \frac{d'Q}{T} \quad (3.5.18)$$



エントロピーの計算  
エントロピーの微分形は

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad (3.5.19)$$

なので、(3.3.4)式より

$$dS = \frac{dU + PdV}{T} \quad (3.5.20)$$

理想気体では(3.4.9)式から

$$\delta Q = dU + pdV = c_v dT + pdV = c_v dT + \frac{RT}{V} dV \quad (3.5.21)$$

だから

$$dS = c_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (3.5.22)$$

積分を行って

$$S(T, V) = c_v \log T + R \log V + \text{const} \quad (3.5.23)$$

$$= c_v \left( \log T + \frac{R}{c_v} \log V \right) + \text{const} \quad (3.5.24)$$

$$= c_v \log TV^{\gamma-1} + \text{const} \quad (3.5.25)$$

ここで  $\frac{R}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$  (3.5.26)

を使った。

## エントロピーと確率

真空への膨張(不可逆過程)を考える。(体積 $V_A \rightarrow V_B$ )  
分子数を $N$ として、  
コックをあけた膨張の状態確率 $W_A$ と拡散後の確率 $W_B$ の比は

$$\frac{W_B}{W_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^N \quad (3.5.27)$$

ここで、

ある分子がどちらにあるかは、体積の比で確率が決まる。

$$S(B) - S(A) = R \log V_B/V_A \quad (3.5.28)$$

$$= R \log \left(\frac{W_B}{W_A}\right)^{1/N} \quad (3.5.29)$$

(3.82)と

$W=Q=0$ がなので $\Delta U=0$ つまり $T$ 一定より

$$= \frac{R}{N} \log W_B/W_A \quad (3.5.30)$$

$N$  をアボガドロ数とすれば、

$$S(B) - S(A) = k \log W_B/W_A \quad (3.5.31)$$

$k$  はボルツマン定数。次式がエントロピーを定義するもうひとつの式になる。

$$S = k \log W \quad (3.5.32)$$

ボルツマンの式

意味するところは: エントロピーはその状態の起きやすさのlog

エントロピーが増大する。: 物理は起きやすい状態に向かう。 という解釈 になる。

## エントロピー増大の法則

不可逆過程でエントロピーがどうなるか考える。

クラウジウスの式: 不可逆過程に対して、

$\Sigma$ であらわされていたものを積分形にした。

エントロピーを計算するには可逆過程を考える必要がある。

$$\oint \frac{d'Q}{T} < 0 \quad (3.5.25)$$

$A \rightarrow B$  を不可逆、 $B \rightarrow A$  を可逆とすると、

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} + \int_B^A \frac{d'Q}{T} < 0 \quad (3.5.26)$$

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} + S(A) - S(B) < 0 \quad (3.5.27)$$

$$S(B) - S(A) > \int_A^B \frac{d'Q}{T} \quad (3.5.28)$$

不可逆過程として断熱不可逆過程を考えると  $d'Q = 0$  なので

$$S(B) - S(A) > 0 \quad (3.5.29)$$

すなわち、断熱系 ( 孤立系 ) のエントロピーは不可逆過程により必ず増大する。

不可逆過程でエントロピーが増大していることを確認する。

## 熱伝導

温度  $T_1$  の固体から温度  $T_2$  の固体に熱量  $d'Q$  が移動する ( $T_1 > T_2$ )。このとき

$$dS = \frac{-d'Q}{T_1} + \frac{d'Q}{T_2} = d'Q \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} > 0 \quad (3.5.30)$$

注: この計算は準静的な可逆過程を用いて行われるべきであり、気体を媒介して熱が伝わると考える。

## 真空中への気体の膨張

温度変化がないので

$$\Delta S = S(B) - S(A) = R \log V_B - R \log V_A = R \log V_B / V_A > 0 \quad (3.5.31)$$

内部エネルギーは変化しないが、エントロピーは増大する。

<<第14講終わり>>

# 熱力学 まとめ地図

できて欲しいこと

気体分子運動論

$$PV = nRT = NkBT$$

$$k_B = R/NA \quad (3.1.7)$$

$$\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{3}{2}kT \quad (3.2.15)$$

導出は物理概念として重要。  
(3.2.15)を誘導に乗って導出できるように。

Q: 気体に与えた熱量  
W: 気体に与えた仕事  
U: 気体の内部エネルギー

比熱の定義

$$c = dQ/dT \quad (3.4.1)$$

熱力学第一法則

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q \quad (3.3.1)$$

$$dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q \quad (3.3.4)$$

定積・低圧比熱

$$\delta Q = c_V dT + pdV \quad (3.4.9)$$

$$c_p = c_V + R \quad (3.4.12)$$

$$\gamma \equiv c_p/c_V \quad (3.4.13)$$

等温過程  $PV = \text{const.} \quad (3.4.14)$

断熱過程  $PV^\gamma = \text{const.} \quad (3.4.16)$

カルノーサイクルの効率

$$\frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (3.4.34)$$

カルノーサイクルは。  
言葉をp-V図にする、式を立てる、  
得られた式の評価など、いじり倒してほしい。

エントロピー

$$\Delta S = S(f) - S(i) = \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad (3.5.32)$$

理想気体でのエントロピー

$$S(T, V) = c_V \log TV^{\gamma-1} + \text{const} \quad (3.5.25)$$

ボルツマンの式

$$S = k \log W \quad (3.5.18)$$

- 補足A

### A.1 関連する高校物理

運動方程式	$ma=F$
フックの法則	$kx=F$
運動量	$p=mv$
仕事	$W=Fx$
運動エネルギー	$E_k=\frac{1}{2}mv^2$
位置エネルギー	$E_p=mgh$
外力=エネルギー変化	$W=\Delta(E_k+E_p)$

記号	意味	備考
$\dot{x}$	$\frac{dx}{dt}$	(時間)微分
$\ddot{x}$	$\frac{d^2x}{dt^2}$	(時間の)二回微分
$\exp(x)$	$e^x$	

## A.2 数学公式

オイラーの公式  
 加法定理  
 加法定理

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

和積の公式  
 和積の公式  
 和積の公式

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

近似式( $\alpha \ll 1$ )

$$\sin \alpha \sim \tan \alpha \sim \alpha \qquad \cos \alpha \sim 1$$

微分、積分(積分定数は省略)

原始関数  
 $e^x$   
 $\frac{1}{x}$

導関数  
 $e^x$   
 $\log x$

合成関数の微分

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df(y)}{dy} \frac{dg(x)}{dx} \quad \text{ここで } y = g(x)$$

偏微分

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad x \text{ は } \eta, \xi \text{ の関数}$$

積分値

三角関数

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi$$

ガウシアン

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$

### A.3 表記

記号	意味	備考
$\dot{x}$	$\frac{dx}{dt}$	(時間)微分
$\ddot{x}$	$\frac{d^2x}{dt^2}$	(時間の)二回微分
$\exp(x)$	$e^x$	