2013年後期　物理学C2（木曜4限　担当：身内） 期末試験

2014年1月30日4限

試験開始時刻 15:10 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。必要に応じて参考資料の定義、値を使用すること。

第一問（次元）（配点 2+5）

表1（次元テーブルと呼ぶ）を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。但し、[M]は質量、[T]は時間、[L]は長さの次元を表すものとする。

- 力 F
- 応力 f

[M]=1

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0	ρ						
-1				α			
-2			f, β		F	$k_{\mathrm{B}}T$	

[M]=0

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1							
-2					g		

表 1: 次元テーブル

第二問（流体力学）（配点 20(+5)）

流体に関して以下の問に答えよ。

1) 定常流の完全流体に関して、以下の量を流体の密度 ρ、流速 v、流体の圧力 p、重力エネルギーの基準からの高さ z、重力加速度 g 及び問題文中で定義される変数を用いて表せ。

- 単位時間に面積 S の断面を通過する流体の体積 Q(流量)
- 単位時間に面積 S の断面を通過する流体の質量 m'
- 単位体積あたりの運動エネルギー E'_{k}
- 単位体積あたりの重力による位置エネルギー E'_{p}

(配点 4)

(採点基準) 各1点

(解答例)$Q = Sv$,$m' = \rho Sv (= \rho Q)$, $E'_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\rho v^2$, $E_p = \rho g z$

2)1) より、流体では

$$\rho S v = \text{const.} \equiv \alpha \tag{1}$$
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.} \equiv \beta \tag{2}$$

が成り立つ。ρ、g、α、β を次元テーブル (表1) に記入せよ。

式 (2) はベルヌーイの定理と呼ばれ、エネルギー保存則の流体への応用と考えることが出来る。

(配点 4)

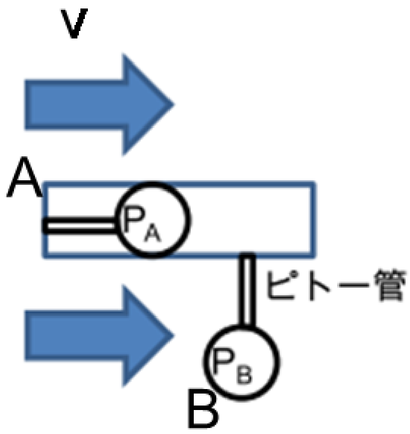

図 1: 2-3) 解答例

(採点基準) 各 1 点
(解答例) 表 1 に記す。

3) ベルヌーイの定理の応用として、ピトー管と呼ばれる装置がある。「」内に記した以下の原理を図にせよ。
「流速 v の流体中の近接する 2 点で圧力を測定する。測定点 A での圧力 p_{A} を流れを妨げる向き（測定点 A では流れが妨げられる為に流速が 0 となる。)、測定点 B での圧力 p_{B} を流れを妨げない向きで測定することで、この流体の速度 v を知ることができる。」
但し図中には v、A、B、p_{A}、p_{B} を示すこと。(配点 5)
(解答例) 図 1 に示す。(採点基準)v、A、B、p_{A}、p_{B} 各 1 点。ベンチュリ管の絵は 0 点。

4) ピトー管にベルヌーイの定理を適用し、p_{A} を p_{B}、ρ、v を用いて表せ。但しピトー管中では重力エネルギーの差は無視できるものとする。
(配点 5)
(解答例)$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}\rho v^2$
(採点基準) 完答のみ。Q を使って同値の式でも可。

5) ピトー管を用いて飛行機の速度を測定することを考えてみよう。4) の方程式を解くと

$$v = \sqrt{2(p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}})/\rho} \tag{3}$$

となる。$p_{\mathrm{A}} = 4.35 \times 10^4\mathrm{Pa}$,$p_{\mathrm{B}} = 3.00 \times 10^4\mathrm{Pa}$ と測定された時の飛行機の速度を有効数字 2 桁で求めよ。圧力が $1.0 \times 10^5\mathrm{Pa}$ での空気の密度を $10^{-3}\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}$ とし、密度は圧力に比例すると考えてよい。但し、上空での圧力は $p_{\mathrm{B}} = 0.3 \times 10^5\mathrm{Pa}$ と考えてよい。
(配点 6)
(解答例)$v = \sqrt{2(p_{\mathrm{A}} - p_{\mathrm{B}})/\rho} = \sqrt{2 \times (4.35 - 3.00) \times 10^4\mathrm{Nm}^{-2}/0.3 \times 1.0 \times 10^{-3}\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}}$
$= \sqrt{2.7 \times 10^4\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}/0.3\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}} = \sqrt{9.0 \times 10^4 \cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 3.0 \times 10^2\mathrm{m}^1\cdot\mathrm{s}^{-1}$

(採点基準) 圧力の単位換算 1 点。密度の単位換算 1 点。代入して 1 点。上空での密度計算 1 点、ただしく計算して 1 点、結果あっていて 1 点。

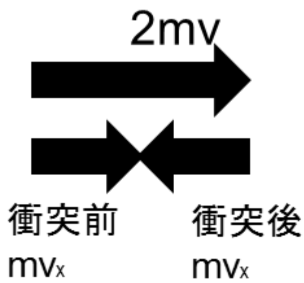

図 2: 3-2) 解答例

第三問（気体分子運動論）（配点 20(+1)）

単原子理想気体分子の運動に関して、以下の問いに答えよ。

1) 質量 m の気体分子が 1 辺 L、容積 V の立方体の容器中を速度 $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ で自由に運動していることを考える。分子が 1 回衝突する際に、x 軸に垂直な壁（2 枚のうち x 座標の大きい方の壁）が受ける力積 f を図示せよ。図には、衝突前の分子の持つ運動量、衝突後の分子の持つ運動量、壁が受ける力積をベクトルで示し、それぞれの大きさも m,L,v_x,v_y,v_z から必要な物を用いて示すこと。
(配点 4)
(解答例) 図 2 に示す。(採点基準) 衝突前、衝突後の運動量大きさ mv_x で各 1 点。逆向きにかかれていて 1 点。力積大きさ $2mv_x$ で 1 点。向き 1 点。(v_y,v_z 成分はあってもなくても構わない。)

2) 1) で考えた壁が単位時間の間にひとつの分子から受ける力積 (=力 F) を m,L,v_x,v_y,v_z から必要な物を用いて表せ。
(配点 4)
(採点基準)
周期 2 点。(解答例) ひとつの分子が衝突する周期 $T=2L/v_x$。$F=f/T=2mv_x/(2L/v_x)=\frac{mv_x^2}{L}$

3) 1~2) を基にして

$$< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T \tag{4}$$

という関係式を導け。また、ボルツマン定数 k_{B} の物理的意味を説明せよ。
(配点 7)
(採点基準)$p=F/L^2$ で 1 点。対称性で $\frac{1}{3}$ だして 1 点。状態方程式とあわせて 1 点。粒子数が nN_A で 2 点 (明示なく 1 mol は 1 点)。ボルツマン定数説明 2 点。
(解答例)x,y,z の対称性から $mv_x^2=mv_y^2=mv_z^2=\frac{1}{3}<mv^2>$。よって $p=nN_AF/L^2=nN_A\frac{mv_x^2}{L^3}=nN_A\frac{1}{3}\frac{mv^2}{L^3}=nN_A\frac{1}{3}\frac{<mv^2>}{V}$。$3pV=nN_A<mv^2>=3nRT$。よって $<\frac{1}{2}mv^2>=\frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T$ ただしボルツマン定数 $k_B=\frac{R}{N_A}$ は分子 1 個あたりの気体定数。

5) 4) の式から、常温での酸素分子 ($\mathrm{O_2}$) の運動する典型的な速度 $\sqrt{<v^2>}$ を有効数字 1 桁で計算せよ。ただし酸素原子の原子量 16 を用いてよい。
(配点 5)
(採点基準)$v=\sqrt{3k_{\mathrm{B}}T/m}$ の形にして 1 点。k_{B},T,m の代入に対してそれぞれ 1 点。計算 1 点。単位無しは 1 点減点。

(解答例) T=300K、$m = 32 \cdot 1.67 \times 10^{-27}$ [kg] を代入。

$$
\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{3k_{\mathrm{B}}T}{m}} && (5)\\
&= \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \times 10^{-23}\,[\mathrm{J \cdot K^{-1}}] \cdot 300\,[\mathrm{K}]}{32 \cdot 1.67 \times 10^{-27}\,[\mathrm{kg}]}} && (6)\\
&= \sqrt{\frac{3 \times 138 \times 300}{32 \times 1.67} \times 10^4\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}} && (7)\\
&= 480\mathrm{m \cdot s^{-1}} && (8)
\end{aligned}
$$

$480\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

6) $k_{\mathrm{B}}T$ を次元テーブル (表 1) に記入せよ。

第四問（カルノーサイクル）（配点 20）

1 モルの理想気体を作業物質とする熱機関に関して以下の問いに答えよ。

1) 以下に記す熱サイクルを横軸 V 縦軸 p の図に示せ。
温度 T_1 の高熱温源と温度 T_2 の低熱温源（$T_1 > T_2$）を用いて次の変化をおこなわせる。
a) 高熱源に接触した A の状態にある系を、熱平衡を保ちながら準静的に等温膨張させて B の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_1、系の受けた仕事を W_1 とする。
b) B の状態から断熱膨張をさせて C の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_2、系の受けた仕事を W_2 とする。
c) 低熱源に接触させ、熱平衡を保ちながら準静的に等温圧縮させて D の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_3、系の受けた仕事を W_3 とする。
d) D の状態から断熱変化をさせて A の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_4、系の受けた仕事を W_4 とする。
図には A、B、C、D、各過程には等温もしくは断熱の文字を示すこと。
また、W_3 を図示せよ。
(配点 5)
(解答例) 図 3 に示す。
(採点基準) 外形正しくて 1 点、ABCD 位置関係正しくて 1 点、等温 2 箇所断熱 2 箇所正しくて各 1 点、$W_3$1 点。

2) b) の過程について、気体の内部エネルギーの変化 ΔU と Q_2、W_2 の間に成り立つ式を示せ。また、断熱過程であることを表す式を書け。
(配点 4)
(解答例)ΔU=Q_2+W_2,$Q_2 = 0$
(採点基準)3 点+2 点
3) 圧力 p の状態で dV の体積変化があった場合の、系の受ける仕事 δW を p、dV を用いて表せ。また、体積が V_1 から V_2 まで変化した時の系の受ける仕事 W を積分記号を用いて表せ。
(配点 4)
(解答例)$-pdV$,$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV$

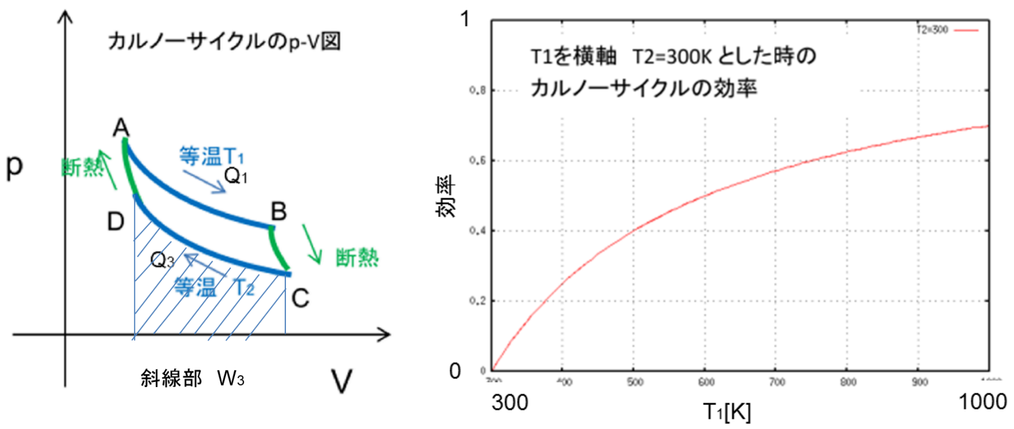

図 3: 4-1),5) 解答例

(採点基準)2 点 (符号逆は 0 点)+3 点 (符号逆は 0 点)

4) 1)~3) より、熱機関としてのカルノーサイクルの効率は

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{9}$$

と表される。T_2 として常温を考え、T_1 を横軸、η を縦軸としたグラフを書け。縦軸には、0、0.5、1 の目盛を打つこと。横軸は最大値を 1000K とし、$\eta = 0$ および $\eta = 0.5$ となる横軸を明記すること。
(配点 4)
(解答例) 図に 3 示す。
(採点基準) 単調増加曲線 2 点。(300,0),(500,0.5),(1000,0.7) 通ってそれぞれ 1 点。

第五問（エントロピー））（配点 8）

1 モルの気体分子が体積 V_A の容器 A に温度 T_A で入っている。細管で接続された真空の V_B の容器 B との間にあるコックを開ける。容器外との熱のやり取りを無視して以下の問いに答えよ。

1) 平衡状態になったときのそれぞれの容器の気体の温度 T'_A,T'_B を求めよ。理由も記すこと。
(配点 2)
(解答例) 気体は仕事をせず、断熱変化なので、$T'_\mathrm{A} = T'_\mathrm{B} = T_\mathrm{A}$
(採点基準) それぞれ 1 点

2) 全ての分子が容器 A にある確率 W_A 容器 B にある確率 W_B との比 $W_\mathrm{A}/W_\mathrm{B}$ を求めよ。
(配点 3)
(解答例) 一つの分子について、$W_\mathrm{A} = V_\mathrm{A}/(V_\mathrm{A} + V_\mathrm{B})$1 モルなので、$N_\mathrm{A}$ 個の分子を考える。$W_\mathrm{A}/W_\mathrm{B} = (V_\mathrm{A}/V_\mathrm{B})^{N_\mathrm{A}}$ (採点基準) 一つの分子について考えて部分点 1 点。N_A 個を明記して部分点 1 点。

3)$S(A) = R \log V_\mathrm{A}$ と表される状態量を考えたとき、$S(B) - S(A)$ を W_A,W_B およびボルツマン定数 k_B を用いてあらわせ。

(配点 3)
(解答例)$S(A)-S(B) = R\log V_{\mathrm{A}} - R\log V_{\mathrm{B}} = R\log\frac{V_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{B}}} = R\log\frac{(}{W_{\mathrm{A}}}W_{\mathrm{B}})^{1/N_{\mathrm{A}}} = \frac{R}{N_{\mathrm{A}}}\log\frac{W_{\mathrm{A}}}{W_{\mathrm{B}}} = k_{\ rmB}\log\frac{W_{\mathrm{A}}}{W_{\mathrm{B}}}$
(採点基準) 代入の式で部分点 1 点。W を入れて部分点 1 点。

意見調査（配点なし）

授業や試験への感想や要望など（良ければ試験勉強時間も教えて下さい）自由に書いてください。

A　参考資料

必要に応じて以下の関係式や変数を用いること。

A.1　数学公式

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \tag{13}$$

A.2　定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
陽子の質量	m_{H}	$1.67{\times}10^{-27}\mathrm{kg}$
氷点の絶対温度		273.15K
ボルツマン定数	k_{B}	$1.38\times10^{-23}\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$

A.3　原子量

水素	H	1.0
炭素	C	12.0
窒素	N	14.0
酸素	O	16.0

A.4　様々な物質の定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.49	0.91-0.96
水	$-$	-	1.0