2013年度後期　物理学C2（木曜4限　担当：身内）中間試験 解答例

2013年12月5日4限

準備でき次第試験開始 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。

第一問（次元）（配点 5(+5)）

表1（次元テーブルと呼ぶ）を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。
速度 $\dot{x}(\equiv \frac{dx}{dt})$、加速度 $\ddot{x}(\equiv \frac{d^2x}{dt^2})$、運動量 $p(\equiv m\dot{x})$、力 $F(\equiv m\ddot{x})$、運動エネルギー $E_k(=\frac{1}{2}m\dot{x}^2)$。
但し、[M] は質量、[T] は時間、[L] は長さの次元を表すものとする。

採点基準 各1点

解答例

[M]=1

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0	ρ						
-1				γ	p		
-2			E	k	F	E_{k}	

[M]=0

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1				ω	$\dot{x}$		
-2					$\ddot{x}$		

表 1: 次元テーブル

第二問（単振動と減衰振動）（配点 25+3）

1) 質量 m の質点を、粘性を持つ流体中にばね定数 k のばねで鉛直に吊るす。つり合いの位置から変位 u を与えた時の図を描け。ここで、流体は運動を妨げる向きに $\gamma\dot{u}$ の大きさの力を与えるものとする。図には原点、変位 u、質点、ばね、働く力（矢印）を記入すること。
また、このときの運動方程式を書け。

配点 5

採点基準 図の原点、ku、$\gamma\dot{u}$ 各1点、運動方程式に2点符号間違いは0点。その他の誤記は-1点。

解答例

(図の描画) 図1の通り。

(運動方程式)

$$m\ddot{u}(t) = -ku(t) - \gamma\dot{u}(t) \tag{1}$$

2) 1) の解答の運動方程式の解のうちのひとつは

$$u(t) = Ae^{(-\alpha\pm i\omega)t} \tag{2}$$

と書け、減衰振動をする。$\alpha = \frac{\gamma}{2m}$ を示せ。

配点 6

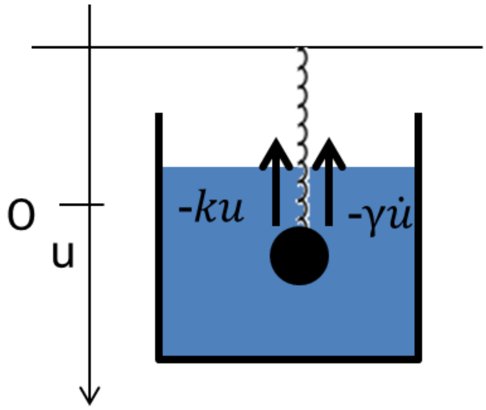

図 1: 第二問　1) 解答例

$\boxed{\text{採点基準}}$ $\ddot{u}(t)$ の式を書いて部分点 2 点
運動方程式に代入して部分点 2 点
$\boxed{\text{解答例}}$

$$u(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega)t} \tag{3}$$
$$\dot{u}(t) = (-\alpha \pm i\omega)u(t) \tag{4}$$
$$\ddot{u}(t) = (-\alpha \pm i\omega)^2 u(t) \tag{5}$$

運動方程式 (1) 式に代入、虚数部分に注目して $\alpha = \frac{\gamma}{2m}$ を得る。

3) γ 及び m の大きさと α の関係、さらに α と減衰の早さについて論ぜよ。

$\boxed{\text{配点 6}}$
$\boxed{\text{採点基準}}$ 各 2 点
$\boxed{\text{解答例}}$ γ 大は α 大を与える。(ここまで 2 点)
m 小は α 大を与える。(ここまで 2 点)
α は指数関数の肩であり、負号がついているので、α 大は早い減衰を与える。(ここまで 2 点)
つまり、流体による運動の妨げが大きい（γ 大）ほど、質量が小さい（m 大）ほど減衰が早い。
4) 式 $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ の変位を持つ波をを考える。この波が速度を $v(v > 0)$ で $+x$ 方向および $-x$ 方向に進む時の波の式 $u(x,t)$ を表せ。またこれらの波の重ねあわせが定在波となることを示せ。但し三角関数の公式 $sinA + sinB = 2sin\frac{A+B}{s}cos\frac{A-B}{2}$ は証明なしに用いてよい。

$\boxed{\text{配点 8}}$
$\boxed{\text{採点基準}}$ $u(x,t)$ の記述各 2 点。符号違い、位相 ϕ 無しは各 1 点減点。式を示して 2 点。結果の説明 2 点。
$\boxed{\text{解答例}}$

+x 方向の波　$u_+(x,t) = A\sin(\omega(t - \frac{x}{v}) + \phi)$。
-x 方向の波　$u_-(x,t) = A\sin(\omega(t + \frac{x}{v}) + \phi)$。

$$u(x,t) = u_+(x,t) + u_-(x,t) \tag{6}$$

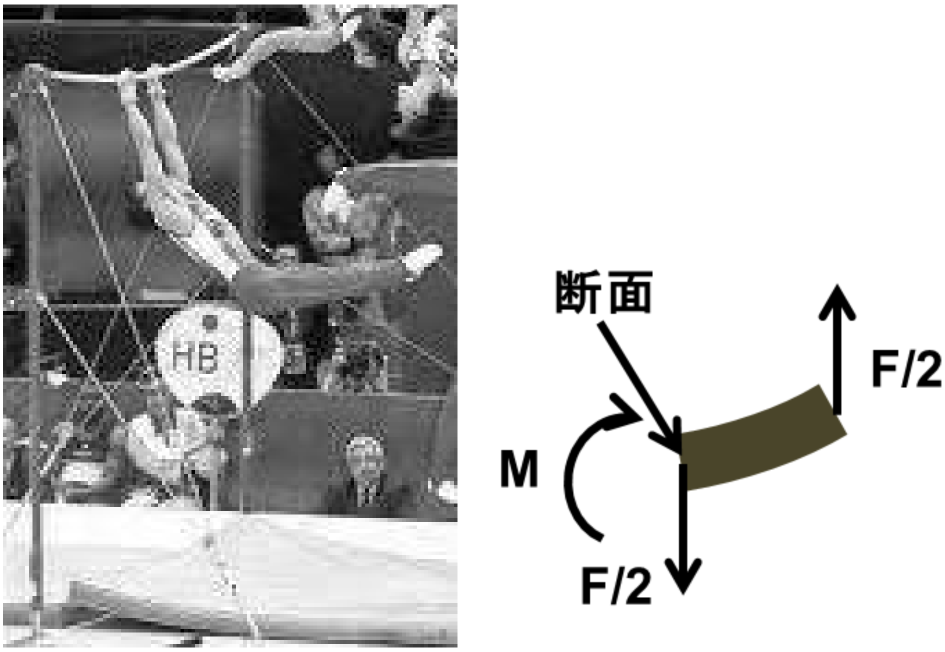

図 2: 鉄棒（左）。中心を含まない部分の力、モーメントのつり合い（右）。

$$= 2Asin(\omega t + 2\phi)cos\omega x \tag{7}$$
$$= 2Acos\frac{\omega x}{v}sin(wt + 2\phi) \tag{8}$$

となる。座標 x に依存する係数と時間 t に依存する係数が分かれており、移動の無い定在波であることが分かる。時間依存の無い係数が振動の振幅となる。位置 x では、振幅 $2Acos\frac{\omega x}{2v}$ の振幅を持つ定在波となる。

5) ばね定数 k、振動数 ω、減衰に関するパラメータ γ を次元テーブルに記入せよ。

配点 3

採点基準 (採点基準) 各 1 点。 解答例

表 1 の通り。

第三問（弾性体のたわみ）（配点 16）

図 2 左の写真の様な情況を、弾性体のモデルとして考える。

1) 棒を弾性体として考えることで、たわみを計算することができる。棒を適当な箇所 (中心を原点とした時の座標を x とする) で仮想的に切断することを考える。2 分された棒のうちで、中心を含まない部分の力のモーメントのつり合いを図 2 右に示す。ここで、M は仮想断面での弾性応力による回転モーメントである。図 2 右を参考にして、中心を含む部分（棒の逆側）の力のモーメントのつり合いの図を描け。棒の質量は無視して良い。また、下向きの力は一点にかかっているとする。

配点 6

採点基準 端の上向き 1 点、人間下向き、右部分からの力 1 点、ここまででつり合っていれば 1 点、おもりの逆端にに回転力あれば 1 点、方向も正しくて 1 点。

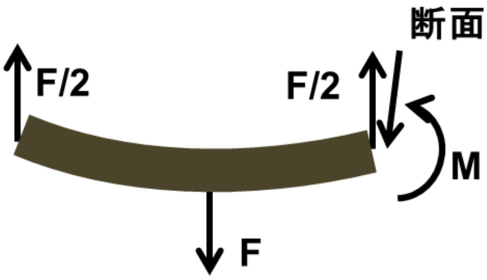

図 3: 第二問 1) 解答例

解答例
図 3 の通り。

2) 棒の長さを l としたときに、図 2 右の力のモーメントのつり合いは、$-(l/2-x)\cdot F/2+M=0$ と書ける。ここで、断面を回転の中心とし、右回りの回転を正とした。また、棒の中心を原点として、棒に沿って x 軸をとった。1) で考えた、中心を含む部分の力のモーメントのつり合いの式を書け。

配点 4
採点基準 解答例
$(l/2+x)\cdot\frac{F}{2}-x\cdot F-M=0$

3) 2) を解き、適当な数学的近似を加えると、たわみが

$$y=\frac{mgl^3}{16\pi r^4 E} \tag{9}$$

として与えられる。ここで y は $x=0$ でのたわみの大きさ、r は棒の半径、g は重量加速度、E は棒のヤング率である。ここで、$F=5mg$ は説明なしに用いてよい。写真などから、m,r,l,y に適当な数値を見積もって代入して、E を有効数字 1 桁で求めよ。この計算結果と参考資料の値をを比較して、モデル及び代入した数値の妥当性について論ぜよ。

配点 6
採点基準) m,r,l,y の見積もり各 1 点（妥当性は無視）。数値計算 1 点。妥当性の議論してあれば 1 点。
解答例
$m=50\mathrm{kg}$,$r=1\mathrm{cm}=0.01\mathrm{m}$,$l=2\mathrm{m}$,$y=10\mathrm{cm}=0.1\mathrm{m}$ と見積もる。

$$E=\frac{mgl^3}{16\pi r^4 y}=\frac{50\cdot 9.8\cdot 2^3}{16\pi(0.01)^4 0.1}=24\times 10^{10}\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2} \tag{10}$$

ほぼ鋼鉄のヤング率と一致する。棒の半径が 4 乗で効くのでこの見積もりが結果を一桁以上変えることがある。

第四問（弾性体の波動）（配点 22+2）

弾性体中を伝わる縦波を考える。
まずは密度 ρ、断面積 S、ヤング率 E の棒を伝わる縦波を考える。
1) 以下の「」内の文章を図示せよ。但し、もともとの微小区間を破線、変形後の同区間を実線で書くこ

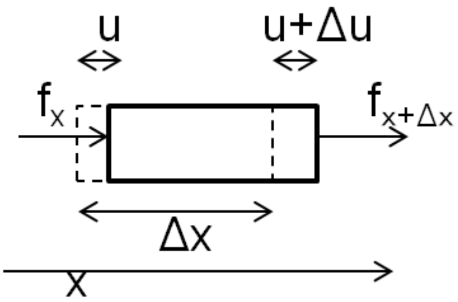

図 4: 第四問　1) 解答例

と。図中には $x, \Delta x, u, \Delta u, f_x$ を記入すること。「もともと、$(x \sim x+\Delta x)$ にあった微小部分が変形して、$(x+u \sim x+\Delta x+u+\Delta u)$ の位置に移ったする。この時のそれぞれの微小区間の両端での応力 f をとする。」

配点 6

採点基準 破線と実線で微小部分の移動が書かれていて 1 点、　$x, \Delta x, u, \Delta u, f_x$ それぞれ 1 点。

解答例

図 4 の通り。 2) ヤング率の定義に従って、応力 f を E,$\Delta u, \Delta x$ を用いて表わせ。

配点 4

採点基準 正しくて 4 点。違っていても f と E の次元があっていれば部分点 1 点、$f \propto \frac{\Delta u}{\Delta x}$ なら部分点 1 点。

解答例

$f = E\frac{\Delta u}{\Delta x}$

3) 2) から得られる運動方程式を解くと式 (11) を得る。

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{11}$$

式 (11) 及び参考資料を用いて、適当な固体をたたいた時の縦波の速度を有効数字 2 桁で計算せよ。
。

配点 5

採点基準

ヤング率、密度を単位付きで拾えて部分点各 1 点。密度の単位変換で部分点 1 点。式に代入して部分点 1 点。計算 1 点。（明示なく式に入れて、密度変換なしは 2 点。）

解答例

鋼鉄を考える。ヤング率 $E = 20 \times 10^{10}[\mathrm{N \cdot m^{-2}}]$、密度 $\rho = 8.0[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}]$ を使う。
$\rho = 8.0[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}] = 8.0 \times 10^{-3} \times 10^{6}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}] = 8.0 \times 10^{3}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]$ なので、

$$= \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^{10}[\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^{-2}}]}{8.0 \times 10^{3}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^{6}}{8.0}[\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}]} = 5.0 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}] \tag{12}$$

アルミニウム　$5.0 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$ ガラス　$4.4 \sim 5.6 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$ ゴム　$2.2[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$

次に、固体中を進む縦波を考える。
4) 固体中に、(a, b, c) の大きさの直方体を考える。この時、縦波の進む方向 x には伸縮するが、横方向には伸縮しないとする。x 方向の歪み Δa は式 (13) として表される。

$$\Delta a = \frac{f_x}{E} a - \sigma \left(\frac{f_y}{E} + \frac{f_z}{E} \right) a \tag{13}$$

ここで σ はポアソン比である。式 (13) を参考にして、横方向（y 及び z 方向）に伸縮しないことを表す式を書け。
配点 3
採点基準 正しくて 3 点。$= 0$ 抜けは 2 点。間違った式=0 は 1 点。
解答例

$$\Delta b = \frac{f_y}{E} b - \sigma \left(\frac{f_z}{E} + \frac{f_x}{E} \right) b = 0 \tag{14}$$

$$\Delta c = \frac{f_z}{E} c - \sigma \left(\frac{f_x}{E} + \frac{f_y}{E} \right) c = 0 \tag{15}$$

5)4) を解くと固体中を進む縦波の速さは

$$v' = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \tag{16}$$

と表される。ただし、

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{17}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{18}$$

である。
3) で計算した物質について、固体の中を進む縦波の速さを計算し、3) の結果と比較せよ。
配点 4
採点基準 ポアソン比拾えていれば部分点 1 点。代入して部分点 1 点。計算 1 点。比較で「速い」1 点。
解答例

鋼鉄を考える。ポアソン比 $\sigma = 0.3$ を使う。
式 (16)-(18) より

$$v' = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{3(1-2\sigma)} + \frac{4 \cdot 2}{3 \cdot 2(1+\sigma)}\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 0.4} + \frac{2}{3 \cdot 1.3}} v = \sqrt{1.346} v = 1.16v = 5.8 \times 10^3 [\mathrm{m \cdot s^{-1}}] \tag{19}$$

単純なモデルよりも実効的なヤング率が大きくなり、速度は 2 割程度速くなる。

アルミニウム　$1.26v$ ガラス $1.06v$ ゴム　無限大
6) ヤング率 E、密度 ρ を次元テーブルに記入せよ。

配点 2
採点基準 (採点基準) 各 1 点。解答例
表 1 の通り。

意見調査（配点なし）

授業に求めるものや、試験への感想や要望など（良ければ試験勉強時間も教えて下さい）自由に書いてください。

A　参考資料

必要に応じて以下の変数を用いること。

A.1　定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

A.2　様々な物質の弾性定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.5	0.91-0.96