2013年度後期　物理学C2（木曜4限　担当：身内）中間試験

2013年12月5日4限

準備でき次第試験開始 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。

第一問（次元）（配点5）

表1（次元テーブルと呼ぶ）を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。
速度 $\dot{x}(\equiv \frac{dx}{dt})$、加速度 $\ddot{x}(\equiv \frac{d^2x}{dt^2})$、運動量 $p(\equiv m\dot{x})$、力 $F(\equiv m\ddot{x})$、運動エネルギー $E_k(=\frac{1}{2}m\dot{x}^2)$。

但し、[M] は質量、[T] は時間、[L] は長さの次元を表すものとする。

[M]=1

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1							
-2							

[M]=0

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1							
-2							

表 1: 次元テーブル

第二問（単振動と減衰振動）（配点28）

1) 質量 m の質点を、粘性を持つ流体中にばね定数 k のばねで垂直に吊るす。つり合いの位置から変位 u を与えた時の図を描け。ここで、流体は運動を妨げる向きに $\gamma\dot{u}$ の大きさの力を与えるものとする。図には原点、変位 u、質点、ばね、働く力（矢印）を記入すること。
また、このときの運動方程式を書け。
2) 1) の解答の運動方程式の解のうちのひとつは

$$u(t) = Ae^{(-\alpha \pm i\omega)t} \tag{1}$$

と書け、減衰振動をする。$\alpha = \frac{\gamma}{2m}$ を示せ。
3) γ 及び m の大きさと α の関係、さらに α と減衰の早さについて論ぜよ。
4) 式 $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ の変位を持つ波をを考える。この波が速度を $v(v > 0)$ で $+x$ 方向および $-x$ 方向に進む時の波の式 $u(x,t)$ を表せ。またこれらの波の重ねあわせが定在波となることを示せ。但し三角関数の公式 $sinA + sinB = 2sin\frac{A+B}{s}cos\frac{A-B}{2}$ は証明なしに用いてよい。
5) ばね定数 k、振動数 ω、減衰に関するパラメータ γ を次元テーブルに記入せよ。

第三問（弾性体のたわみ）（配点16）

図1左の写真の様な情況を、弾性体のモデルとして考える。

1) 棒を弾性体として考えることで、たわみを計算することができる。棒を適当な箇所 (中心を原点とした時の座標を x とする) で仮想的に切断することを考える。2分された棒のうちで、中心を含まない部分

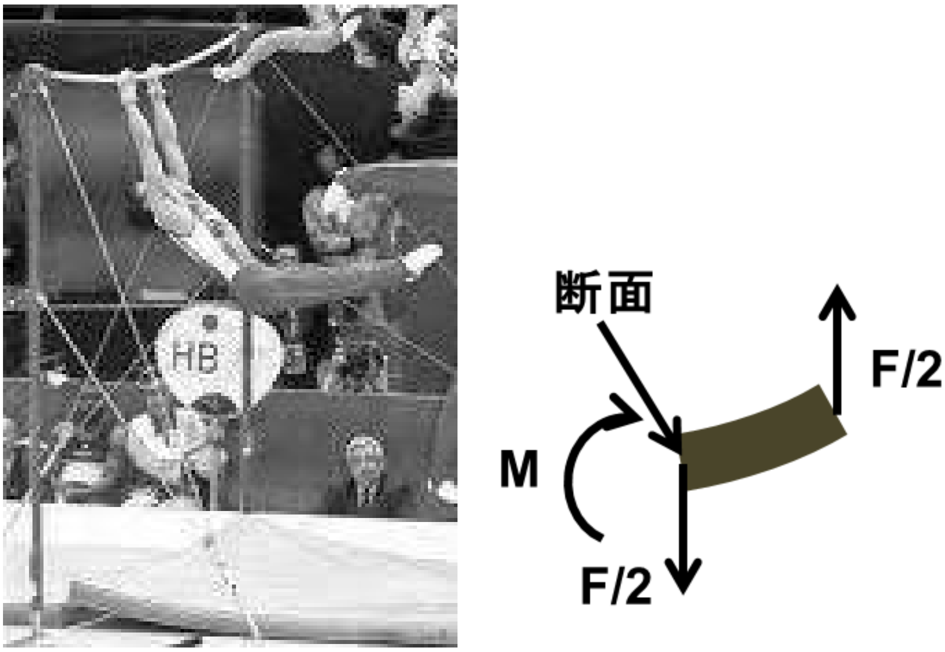

図 1: 鉄棒（左）。中心を含まない部分の力、モーメントのつり合い（右）。

の力のモーメントのつり合いを図 1 右に示す。ここで、M は仮想断面での弾性応力による回転モーメントである。図 1 右を参考にして、中心を含む部分（棒の逆側）の力のモーメントのつり合いの図を描け。棒の質量は無視して良い。また、下向きの力は一点にかかっているとする。
2) 棒の長さを l としたときに、図 1 右の力のモーメントのつり合いは、$-(l/2-x)\cdot F/2+M=0$ と書ける。ここで、断面を回転の中心とし、右回りの回転を正とした。また、棒の中心を原点として、棒に沿って x 軸をとった。1) で考えた、中心を含む部分の力のモーメントのつり合いの式を書け。
3) 2) を解き、適当な数学的近似を加えると、たわみが

$$y=\frac{Fl^3}{16\pi r^4 E} \tag{2}$$

として与えられる。ここで y は $x=0$ でのたわみの大きさ、r は棒の半径、g は重量加速度、E は棒のヤング率である。ここで、$F=5mg$ は説明なしに用いてよい。写真などから、m,r,l,y に適当な数値を見積もって代入して、E を有効数字 1 桁で求めよ。この計算結果と参考資料の値をを比較して、モデル及び代入した数値の妥当性について論ぜよ。

第四問（弾性体の波動）（配点 26）

弾性体中を伝わる縦波を考える。
まずは密度 ρ、断面積 S、ヤング率 E の棒を伝わる縦波を考える。
1) 以下の「」内の文章を図示せよ。但し、もともとの微小区間を破線、変形後の同区間を実線で書くこと。図中には $x,\Delta x,u,\Delta u,f_x$ を記入すること。「もともと、$(x\sim x+\Delta x)$ にあった微小部分が変形して、$(x+u\sim x+\Delta x+u+\Delta u)$ の位置に移ったする。この時のそれぞれの微小区間の両端での応力を f とする。」
2) ヤング率の定義に従って、応力 f を E,$\Delta u,\Delta x$ を用いて表わせ。
3) 2) から得られる運動方程式を解くと式 (3) を得る。

$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3}$$

式 (3) 及び参考資料を用いて、適当な固体をたたいた時の縦波の速度を有効数字 2 桁で計算せよ。

次に、固体中を進む縦波を考える。
4) 固体中に、(a, b, c) の大きさの直方体を考える。この時、縦波の進む方向 x には伸縮するが、横方向には伸縮しないとする。x 方向の歪み Δa は式 (4) として表される。

$$\Delta a = \frac{f_x}{E}a - \sigma\left(\frac{f_y}{E} + \frac{f_z}{E}\right)a \tag{4}$$

ここで σ はポアソン比である。式 (4) を参考にして、横方向（y 及び z 方向）に伸縮しないことを表す式を書け。
5)4) を解くと固体中を進む縦波の速さは

$$v' = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \tag{5}$$

と表される。ただし、

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{6}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{7}$$

である。3) で計算した物質について、固体の中を進む縦波の速さを計算し、3) の結果と比較せよ。
6) ヤング率 E、密度 ρ を次元テーブルに記入せよ。

意見調査（配点なし）

授業に求めるものや、試験への感想や要望など（良ければ試験勉強時間も教えて下さい）自由に書いてください。

A　参考資料

必要に応じて以下の変数を用いること。

A.1　定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

A.2　様々な物質の弾性定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N \cdot m^{-2}}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.5	0.91-0.96