

2012 年後期 物理学 C2 (木曜 4 限 担当: 身内) 期末試験

2012 年 1 月 24 日 4 限

試験開始時刻 15:10 / 試験終了時刻 16:40

以下の問題に全て答えよ。必要に応じて参考資料の定義、値を使用すること。

第一問 (次元) (配点 1(+6))

表 1 (次元テーブルと呼ぶ) を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。但し、 $[M]$ は質量、 $[T]$ は時間、 $[L]$ は長さの次元を表すものとする。

- 運動エネルギー E_k

$[M]=1$								$[M]=0$							
	-3	-2	-1	$[L]=0$	1	2	3		-3	-2	-1	$[L]=0$	1	2	3
2								2							
1								1							
$[T]=0$	ρ							$[T]=0$							
-1				α				-1							
-2			p, β			$E_k, k_B T$		-2					g		

表 1: 次元テーブル

第二問 (流体力学) (配点 23+5)

流体に関して以下の問に答えよ。

1) 定常流の完全流体に関して、以下の量を流体の密度 ρ 、流速 v 、流体の圧力 p 、重力エネルギーの基準からの高さ z 、重力加速度 g 及び問題文中で定義される変数を用いて表せ。

- 微小時間 δt の間に流体中の 1 点が移動する長さ l
- 微小時間 δt の間に面積 S の断面を通過する流体の体積 V'
- 単位時間間に面積 S の断面を通過する流体の体積 Q (流量)
- 体積 V の流体の質量 m
- 微小時間 δt の間に面積 S の断面を通過する流体の質量 m'
- 体積 V の持つ運動エネルギー E_k
- 単位体積あたりの運動エネルギー E'_k
- 単位体積あたりの重力による位置エネルギー E'_p

(配点 8)

(採点基準) 各 1 点

(解答例) $l = v\delta t, V' = Sv\delta t, Q = Sv, m = \rho V, m' = \rho Sv\delta t (= \rho V')$, $E_k = \frac{1}{2}\rho V v^2, E'_k = \frac{1}{2}\rho v^2, E_p = \rho g z$

2) 1) より、流体では

$$\rho S v = \text{const.} \equiv \alpha \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.} \equiv \beta \quad (2)$$

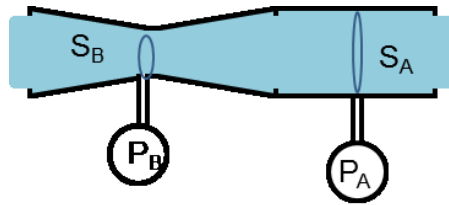


図 1: 2-3) 解答例

が成り立つ。 ρ 、 g 、 p 、 α 、 β を次元テーブル(表1)に記入せよ。

式(2)はベルヌーイの定理と呼ばれ、エネルギー保存則の流体への応用と考えることができる。

(配点5)

(採点基準)各1点

(解答例)表1に記す。

3) ベルヌーイの定理の応用として、ベンチュリ管と呼ばれる装置がある。「」内に記した以下の原理を図にせよ。

「断面積が一樣でない管の2点A、Bでの圧力 p_A および p_B を測定することで、流量 Q を求めることができる。」

図中には p_A 、 p_B 、A、Bでの断面積を S_A および S_B を記入すること。また、 $p_A > p_B$ となるように図を描くこと。(配点5)

(解答例)図1に示す。(採点基準)各1点

4) ベンチュリー管にベルヌーイの定理を適用、式(2)に対応する方程式を立てよ。但しベンチュリー管中では重力エネルギーの差は無視できるものとする。

(配点5) (解答例) $p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$

(採点基準)完答のみ

5) ベンチュリー管を用いて、水の流量を測定することを考えよう。4)の方程式を解くと

$$Q = S_A S_B \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \quad (3)$$

と示される。この式を用いて、通常の管部が 20 cm^2 の管中を流れる水の流量を測定することを考えよう。管の一部を 1 cm^2 と細くして通常の管部との圧力差を測定したところ、 $1.0 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$ だった。この時の流量 Q を有効数字2桁、単位付きで求めよ。(配点5)

(採点基準)代入して1点。時間の換算1点。密度の換算1点。それぞれ計算して1点ずつ。

(解答例) $20 \text{ cm}^2 = 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $1 \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,

$1.0 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2} = 1.0 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$ 。代入して

$$Q = S_A S_B \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \quad (4)$$

$$= 20 \times 10^{-4} [\text{m}^2] \times 1 \times 10^{-4} [\text{m}^2] \sqrt{\frac{2 \times 1.0 \times 10^4 [\text{N} \cdot \text{m}^{-2}]}{1 \times 10^3 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot ((20 \times 10^{-4} [\text{m}^2])^2 - (1 \times 10^{-4} [\text{m}^2])^2)}} \quad (5)$$

$$= 20 \times 10^{-8} [\text{m}^4] \sqrt{\frac{2 \times 10^4 [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{m}^{-1}]}{1 \times 10^3 [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}] \cdot (400 - 1) \times 10^{-8} [\text{m}^4]}} \quad (6)$$

$$\simeq 20 \times 10^{-8} [\text{m}^4] \sqrt{\frac{2 \times 10^4 [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}]}{400 \times 10^{-5} [\text{kg} \cdot \text{m}]}} \quad (7)$$

$$= 20 \times 10^{-8} [\text{m}^4] \sqrt{5 \times 10^6 [\text{m} \cdot \text{s}^{-2} \text{m}^{-2}]} \quad (8)$$

$$= 450 \times 10^{-6} [\text{m}^3 \text{s}^{-1}] = 450 [\text{cm}^3 \text{s}^{-1}] \quad (9)$$

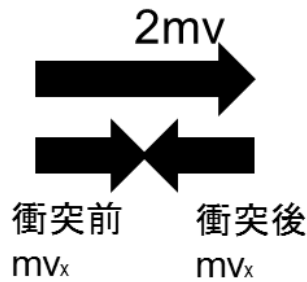


図 2: 3-2) 解答例

第三問 (気体分子運動論) (配点 20+1)

単原子理想気体分子の運動に関して、以下の問いに答えよ。

1) 質量 m の気体分子が 1 辺 L 、容積 V の立方体の容器中を速度 $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ で自由に運動していることを考える。分子が 1 回衝突する際に、 x 軸に垂直な壁 (2 枚のうち x 座標の大きい方の壁) が受ける力積 f を図示せよ。図には、衝突前の分子の持つ運動量、衝突後の分子の持つ運動量、壁が受ける力積をベクトルで示し、それぞれの大きさも m, L, v_x, v_y, v_z などを用いて示すこと。

(配点 5)

(解答例) 図 2 に示す。(採点基準) 衝突前、衝突後の運動量大きさ mv_x で各 1 点。逆向きにかかれています。1 点。力積大きさ $2mv_x$ で 1 点。向き 1 点。(v_y, v_z 成分はあってもなくても構わない。)

2) 1) で考えた壁にひとつの分子が衝突する周期 T を m, L, v_x, v_y, v_z などを用いて表せ。

(配点 3)

(採点基準)

(解答例) $T = 2L/v_x$

3) 1) で考えた壁が時間 t の間にひとつの分子から受ける力積を f, t, T を用いて表せ。

(配点 3)

(採点基準)

(解答例) ft/T

4) 1) で考えた壁が分子から力 F を受けた時の圧力 p を F, L を用いて表せ。

(配点 4)

(採点基準)

(解答例) $p = F/L^2$

5) 1~4) までを考えあわせると、

$$\left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{3}{2}k_B T \quad (10)$$

という関係式が得られる。ここで、 T は気体の温度、 k_B はボルツマン定数である。この式から、常温での酸素分子 (O_2) の運動する典型的な速度 $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ を有効数字 1 桁で計算せよ。ただし酸素原子の原子量 16 を用いてよい。

(配点 5)

(採点基準) $v = \sqrt{3k_B T/m}$ の形にして 1 点。 k_B, T, m の代入に対してそれぞれ 1 点。計算 1 点。単位無

しは1点減点。

(解答例) $T=300\text{K}$ 、 $m = 32 \cdot 1.67 \times 10^{-27} [\text{kg}]$ を代入。

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (11)$$

$$= \sqrt{\frac{3 \cdot 1.38 \times 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}] \cdot 300 [\text{K}]}{32 \cdot 1.67 \times 10^{-27} [\text{kg}]}} \quad (12)$$

$$= \sqrt{\frac{3 \times 138 \times 300}{32 \times 1.67}} \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (13)$$

$$= 480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (14)$$

480m/s

6) $k_B T$ を次元テーブル (表 1) に記入せよ。

第四問 (カルノーサイクル) (配点 25)

1 モルの理想気体を作業物質とする熱機関に関して以下の問いに答えよ。

1) 以下に記す熱サイクルを横軸 V 縦軸 p の図に示せ。

温度 T_1 の高熱温源と温度 T_2 の低熱温源 ($T_1 > T_2$) を用いて次の変化をおこなわせる。

a) 高熱源に接触した A の状態にある系を、熱平衡を保ちながら準静的に等温膨張させて B の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_1 、系の受けた仕事を W_1 とする。

b) B の状態から断熱膨張をさせて C の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_2 、系の受けた仕事を W_2 とする。

c) 低熱源に接触させ、熱平衡を保ちながら準静的に等温圧縮させて D の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_3 、系の受けた仕事を W_3 とする。

d) D の状態から断熱変化をさせて A の状態にする。このとき系に入った熱量を Q_4 、系の受けた仕事を W_4 とする。

図には A、B、C、D、各過程には等温もしくは断熱の文字、熱の出入りを伴う過程には系に入った熱量を示すこと。

(配点 5)

(解答例) 図に 3 示す。

(採点基準) 外形正しくて 1 点、ABCD 位置関係正しくて 1 点、等温 2 箇所正しくて 1 点、断熱 2 箇所正しくて 1 点、 Q_1 及び Q_3 が書いてあって 1 点。

2) b) の過程について、気体の内部エネルギーの変化 ΔU と Q_2 、 W_2 の間に成り立つ式を示せ。また、断熱過程であることを表す式を、書け。

(配点 5)

(解答例) $\Delta U = Q_2 + W_2, Q_2 = 0$

(採点基準) 3 点 + 2 点

3) 圧力 p の状態で dV の体積変化があった場合の、系の受ける仕事 δW を p 、 dV を用いて表せ。また、体積が V_1 から V_2 まで変化した時の系の受ける仕事 W を積分記号を用いて表せ。(配点 5)

(解答例) $-pdV, W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV$

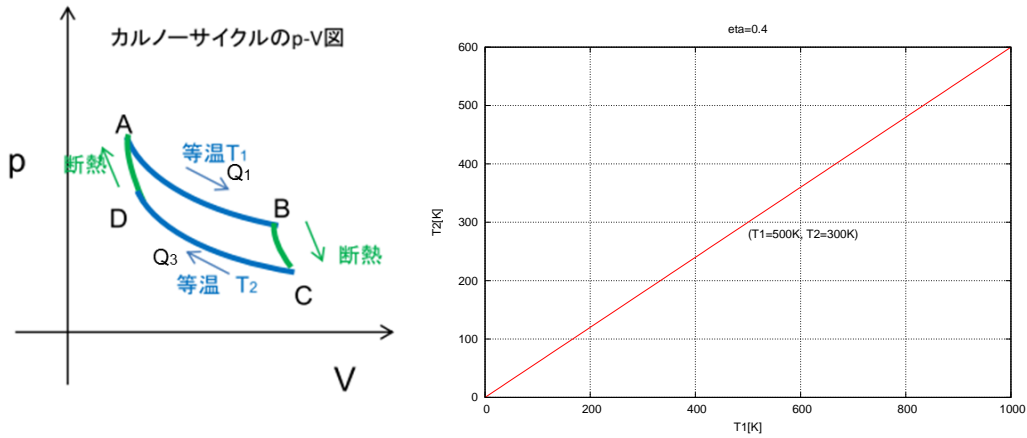


図 3: 4-1), 5) 解答例

(採点基準) 2 点 (符号逆は 0 点) + 3 点

4) 1)~3) より、1 サイクルで系の受ける仕事は $W = W_1 + W_3$ と書ける。

$$W_1 = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_1}{V} dV \quad (15)$$

$$W_3 = - \int_{V_C}^{V_D} \frac{RT_2}{V} dV \quad (16)$$

の積分を実行して、 W を T_1 、 T_2 、 V_A 、 V_B 、 R を用いて表せ。ただし、 $V_B/V_A = V_C/V_D$ の関係を用いて良い。

(配点 5)

(解答例) $-R(T_1 - T_2) \log V_B/V_A$

(採点基準) 積分それぞれ 2 点 足し算までして 1 点

5) 1)~4) より、熱機関としてのカルノーサイクルの効率

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (17)$$

と表される。 $\eta = 0.4$ の熱機関を実現するための温度条件を考える。 $\eta = 0.4$ を満たす線を T_1 を横軸、 T_2 を縦軸とした図に描け。横軸は最大値を 1000K とし、 $T_2=300K$ の時の縦軸、横軸を明記すること。(配点 5)

(解答例) 図に??示す。

(採点基準) 単調増加、直線それぞれ 1 点。(0,0),(500,300),(1000,600) 通ってそれぞれ 1 点。

意見調査 (配点なし)

授業や試験への感想や要望など (良ければ試験勉強時間も教えて下さい) 自由に書いてください。

A 参考資料

必要に応じて以下の関係式や変数を用いること。

A.1 数学公式

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \quad (18)$$

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \quad (19)$$

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad (20)$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \quad (21)$$

A.2 定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
陽子の質量	m_{H}	$1.67 \times 10^{-27}\text{kg}$
氷点の絶対温度		273.15K
ボルツマン定数	k_{B}	$1.38 \times 10^{-23}\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$

A.3 原子量

水素	H	1.0
炭素	C	12.0
窒素	N	14.0
酸素	O	16.0

A.4 様々な物質の定数

物質	ヤング率 [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$]	ポアソン比	密度 [$\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$]
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^6	0.49	0.91-0.96
水	—	-	1.0