2012年度後期　物理学C2（木曜4限　担当：身内）中間試験

2012年11月29日4限

準備でき次第試験開始 / 試験終了時刻　16:40

以下の問題に全て答えよ。

第一問（次元）（配点5(+4)）

表1（次元テーブルと呼ぶ）を解答用紙に書き写し、以下の物理量を該当箇所に記入せよ。
速度 $\dot{x}(\equiv \frac{dx}{dt})$、加速度 $\ddot{x}(\equiv \frac{d^2x}{dt^2})$、運動量 $p(\equiv m\dot{x})$、力 $F(\equiv m\ddot{x})$、運動エネルギー $E_k(=\frac{1}{2}m\dot{x}^2)$。
但し、[M] は質量、[T] は時間、[L] は長さの次元を表すものとする。

採点基準 各1点

解答例

[M]=1

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0	ρ						
-1					p		
-2			E	k	F	E_k	

[M]=0

	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0							
-1				ω	$\dot{x}$		
-2					$\ddot{x}$		

表 1: 次元テーブル

第二問（単振動と減衰振動）（配点25(-2)）

1) 質量 m の質点を摩擦の無視できる床上に置き、ばね定数 k のばねで垂直な壁に接続する。つり合いの位置から変位 u を与えた時の図を描け。図には原点、変位 u、質点、ばね、働く力（矢印）を記入すること。
また、このときの運動方程式を書け。

配点7

採点基準

(図の描画) 原点、変位 u、質点、ばね、働く力（矢印）各1点。
(運動方程式) 正しくて2点。符号間違いは0点。その他の誤記は各-1点。

解答例

(図の描画) 図1の通り。
(運動方程式)

$$m\ddot{u}(t) = -ku(t) \tag{1}$$

2) 1) の解答の運動方程式の解のうちのひとつは

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi) \tag{2}$$

と書け、単振動をする。$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ を示せ。

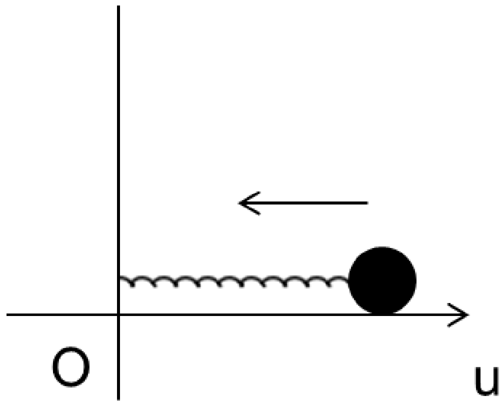

図 1: 第二問　1) 解答例

配点 4
採点基準 $\ddot{u}(t)$ の式に $u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ を代入して部分点 2 点
解答例

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2}{dt^2}A\sin(\omega t + \phi) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

運動方程式 (1) 式より

$$\ddot{u}(t) = -\frac{k}{m}u(t) \tag{4}$$

と合わせて

$$\ddot{u}(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)) = -\frac{k}{m}u(t) = -\frac{k}{m}A\sin(\omega t + \phi) \tag{5}$$

よって $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。

3) 現実的な k 及び m を仮定して、単振動の周期 T について論ぜよ。

配点 6
採点基準 現実的な k, m の設定で部分点 2 点 (単位無しは各 1 点減点)、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ の記述で 2 点。計算して 2 点。
解答例
$M = 1$kg のおもりで $x = 10$cm 伸びるばねに $m = 1$kg のおもりをぶら下げた時の単振動を考える。$Mg = kx$ より、$k = Mg/x$。$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$。$T = \frac{2\pi}{\omega}$ なので、$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mx}{Mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.0\times0.1}{1.0\times9.8}} = 0.6[s]$。
　途中式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ より、単振動の周期 T は、おもりの質量 m が大きいほど、ばね定数 k が小さいほど、長くなる。

4) 式 (2) の変位を持つ波をを考える。この波が $v > 0$ で $+x$ 方向に進む時の波の式 $u(x,t)$ を表せ。また、この式が波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たすことを示せ。

配点 6
採点基準 $u(x,t)$ の記述で 3 点。符号違い、位相 ϕ 無しは各 1 点減点。波動方程式を示して 3 点。

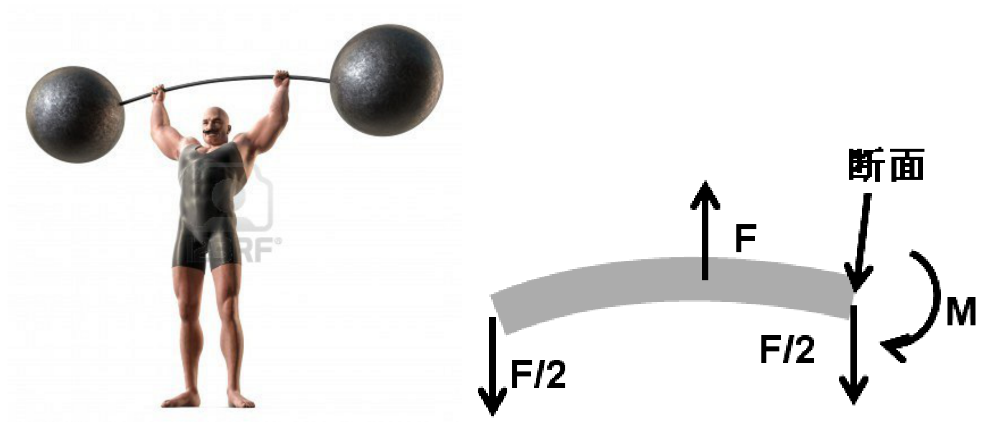

図 2: ちからもち（左）。中心を含む部分の力のモーメントのつり合い（右）。

解答例

$u(x,t) = A\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi)$。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} A\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi) = -A\omega^2\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi) \tag{6}$$

と

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi) = -A\frac{\omega^2}{v^2}\sin(\omega(t-\frac{x}{v})+\phi) \tag{7}$$

より波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たす。

5) ばね定数 k、振動数 ω を次元テーブルに記入せよ。

配点 2。(第一問で勘案。)

採点基準 各 1 点。

第三問（弾性体のたわみ）（配点 20）

図 2 左の写真の様な情況を、弾性体のモデルとして考える。

1) 棒を弾性体として考えることで、たわみを計算することができる。棒を適当な箇所 (中心を原点とした時の座標を x とする) で仮想的に切断することを考える。2 分された棒のうちで、中心を含む部分の力のモーメントのつり合いを図 2 右に示す。ここで、M は仮想断面での弾性応力による回転モーメントである。図 2 右を参考にして、中心を含まない部分（棒の逆側）の力のモーメントのつり合いの図を描け。棒の質量は無視して良い。また、上向きの力は一点にかかっているとする。

配点 5

採点基準 おもり 1 点、左部分からの力 1 点、ここまででつり合っていれば 1 点、おもりの逆端にに回転力あれば一点、方向も正しくて 1 点。

解答例

図 3 の通り。2) 棒の長さを l としたときに、図 2 右の力のモーメントのつり合いは、$l/2\cdot F = (l/2+x)\cdot F/2 + M$ と書ける。ここで、$x = -l/2$ を回転の中心とした。1) で考えた、中心を含まない部分の力のモーメントのつり合いの式を書け。

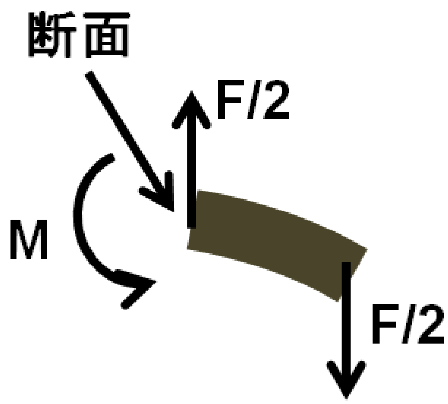

図 3: 第三問　1) 解答例。

$\boxed{\text{採点基準}}$ 正しくて 5 点。$(l/2-x)\cdot F/2=-M$ や $(l/2+x)\cdot F/2=M$ は 0 点。
$\boxed{\text{解答例}}$ $(l/2-x)\cdot F/2=M$

3) 2) を解き、適当な数学的近似を加えると、たわみが

$$y=\frac{mgl^3}{16\pi r^4E} \tag{8}$$

として与えられる。ここで y は $x=\pm\frac{1}{2}l$ でのたわみの大きさ、r は棒の半径、g は重量加速度、E は棒のヤング率である。写真などから、m,r,l に適当な数値を見積もって代入して、y を有効数字 2 桁で求めよ。必要に応じで参考資料の値を使用すること。この計算結果と写真を比較して、モデル及び代入した数値の妥当性について論ぜよ。
$\boxed{\text{配点 10}}$
$\boxed{\text{採点基準}}$m,r の見積もり各 2 点（妥当性は無視）。数値計算 2 点。妥当性の議論してあれば 2 点。妥当、もしくは修整の方向性が書いてあれば 2 点。
$\boxed{\text{解答例}}$ l=2m,r=0.01m,m=200kg を代入する。

$$y=\frac{200\times 9.8\times(2)^3}{16\times\pi\times(10^{-2})^4\times 20\times 10^{10}}=\frac{9.8}{16\cdot\pi}\sim 0.2[m] \tag{9}$$

20cm のたわみは妥当と言える。

第四問（弾性体の波動）（配点 25）

弾性体中を伝わる縦波を考える。
まずは密度 ρ、断面積 S、ヤング率 E の棒を伝わる縦波を考える。
1) 以下の「」内の文章を図示せよ。但し、もともとの微小区間を破線、変形後の同区間を実線で書くこと。図中には $x,\Delta x,u,\Delta u,f_x$ を記入すること。「もともと、$(x\sim x+\Delta x)$ にあった微小部分が変形して、$(x+u\sim x+\Delta x+u+\Delta u)$ の位置に移ったする。この時のそれぞれの微小区間の両端での応力 f をとする。」
。

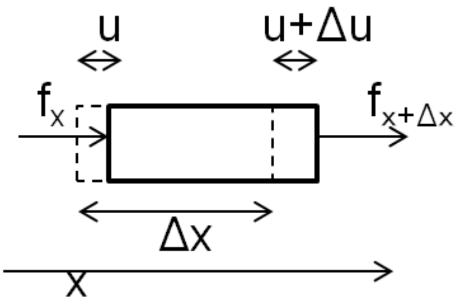

図 4: 第四問　1) 解答例

配点 6
採点基準 破線と実線で微小部分の移動が書かれていて 1 点、　$x, \Delta x, u, \Delta u, f_x$ それぞれ 1 点。
解答例
図 4 の通り。

2) ヤング率の定義に従って、応力 f を E,$\Delta u, \Delta x$ を用いて表わせ。
配点 4
採点基準 正しくて 4 点。違っていても f と E の次元があっていれば部分点 1 点、$f \propto \frac{\Delta u}{\Delta x}$ なら部分点 1 点。
解答例
$f = E\frac{\Delta u}{\Delta x}$

3) 2) から得られる運動方程式を解くと式 (10) を得る。

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{10}$$

式 (10) 及び参考資料を用いて、適当な固体をたたいた時の縦波の速度を有効数字 2 桁で計算せよ。
配点 5
採点基準
ヤング率、密度を単位付きで拾えて部分点各 1 点。密度の単位変換で部分点 1 点。式に代入して部分点 1 点。計算 1 点。（明示なく式に入れて、密度変換なしは 2 点。）
解答例
鋼鉄を考える。ヤング率 $E = 20 \times 10^{10}[\mathrm{N \cdot m^{-2}}]$、密度 $\rho = 8.0[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}]$ を使う。
$\rho = 8.0[\mathrm{g \cdot cm^{-3}}] = 8.0 \times 10^{-3} \times 10^{6}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}] = 8.0 \times 10^{3}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]$ なので、

$$= \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \times 10^{10}[\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2} \cdot m^{-2}}]}{8.0 \times 10^{3}[\mathrm{kg \cdot m^{-3}}]}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^{6}}{8.0}[\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}]} = 5.0 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}] \tag{11}$$

アルミニウム　$5.0 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$ ガラス　$4.4 \sim 5.6 \times 10^{3}[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$ ゴム　$2.2[\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$

次に、固体中を進む縦波を考える 。

4) 固体中に、(a, b, c) の大きさの直方体を考える。この時、縦波の進む方向 x には伸縮するが、横方向に

は伸縮しないとする。x 方向の歪み Δa は式 (12) として表される。

$$\Delta a = \frac{f_x}{E}a - \sigma\left(\frac{f_y}{E} + \frac{f_z}{E}\right)a \tag{12}$$

ここで σ はポアソン比である。式 (12) を参考にして、横方向（y 及び z 方向）に伸縮しないことを表す式を書け。

配点 4

採点基準 正しくて 4 点。$=0$ 抜けは 2 点。間違った式=0 は 1 点。

解答例

$$\Delta b = \frac{f_y}{E}b - \sigma\left(\frac{f_z}{E} + \frac{f_x}{E}\right)b = 0 \tag{13}$$

$$\Delta c = \frac{f_z}{E}c - \sigma\left(\frac{f_x}{E} + \frac{f_y}{E}\right)c = 0 \tag{14}$$

5)4) を解くと固体中を進む縦波の速さは

$$v' = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} \tag{15}$$

と表される。ただし、

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \tag{16}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{17}$$

である。3) で計算した物質について、固体の中を進む縦波の速さを計算し、3) の結果と比較せよ。

配点 4

採点基準 ポアソン比拾えていれば部分点 1 点。代入して部分点 1 点。計算 1 点。比較で「速い」1 点。

解答例

鋼鉄を考える。ポアソン比 $\sigma = 0.3$ を使う。
式 (15)-(17) より

$$v' = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{3(1-2\sigma)} + \frac{4}{3\cdot 2(1+\sigma)}\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{3\cdot 0.4} + \frac{2}{3\cdot 1.3}}v = \sqrt{1.346}v = 1.16v = 5.8\times 10^3[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}] \tag{18}$$

単純なモデルよりも実効的なヤング率が大きくなり、速度は 2 割程度速くなる。

アルミニウム　1.26v ガラス 1.06v ゴム　無限大

6) ヤング率 E、密度 ρ を次元テーブルに記入せよ。

配点 2。(第一問で勘案。)

採点基準 各 1 点。

意見調査（配点なし）

授業に求めるものや、試験への感想や要望など（良ければ試験勉強時間も教えて下さい）自由に書いてください。

A　参考資料

必要に応じて以下の変数を用いること。

A.1　定数など

自然対数の底	e	2.7183
円周率	π	3.1415
重力加速度	g	$9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

A.2　様々な物質の弾性定数

物質	ヤング率 $[\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-2}]$	ポアソン比	密度 $[\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}^{-3}]$
鋼鉄	20×10^{10}	0.3	7.5-8.0
アルミニウム	7×10^{10}	0.35	2.7
ガラス	7×10^{10}	0.22	2.2-3.6
ゴム	5×10^{6}	0.5	0.91-0.96