2011年度　物理学C2 (1年生対象)
講義メモver20120125
（川越清以＋身内賢太朗）

講義担当教員：身内賢太朗
物理・粒子物理研究室
自然3号館317号室
TEL 078-803-5637
miuchi@phys.sci.kobe-u.ac.jp

本講義メモは http://ppwww.phys.sci.kobe-u.ac.jp/~miuchi/
に改訂します。

スケジュール

講	ページ	日付	タイトル	主な内容
01	3	2011/10/6	振動と波動1	ガイダンス・単振動と減衰振動
02	8	2011/10/13	振動と波動2	連成振動・振動の合成・波動
03	17	2011/10/20	振動と波動3	波動方程式・波の速度
04	23	2011/10/27	振動と波動4	波のエネルギー・反射と透過・定在波
05	31	2011/11/10	弾性体1	弾性体の定義・定数の定義、関係式
06	35	2011/11/17	弾性体2	たわみ・ねじれ
07	41	2011/11/24	弾性体3	弾性のエネルギー・弾性波
08	45	2011/12/1	流体1	流体・完全流体
09		2011/12/8	中間試験	
10	48	2011/12/15	流体2	粘性流体
11	52	2011/12/22	熱力学1	気体の分子運動論
12	56	2012/1/12	熱力学2	熱力学第一法則
13	59	2012/1/19	熱力学3	カルノーサイクル
14	62	2012/1/26	熱力学4	熱力学第二法則・エントロピー
15		2012/2/2	期末試験	
		2012/2/9	予備日	
		2012/2/16	予備日2	

- 改訂log
  - 20111007　第二講まで完成　第四講まで暫定。
  - 20111013　第四講まで完成。
  - 20111020　p8のコメント修整、進度修整。
  - 20111021　p23にコメント追加。
  - 20111027　振動と波動まとめ地図を追加。うなりの説明を追加。定在波の説明を追加。第五講まで完成。第七講まで暫定。
  - 20111110　第六講まで完成。
  - 20111116　第八講まで完成。弾性体まとめ地図を追加。
  - 20111130　中間試験を意図して、「目指すところ」の記述（以下）を追加。
  - 20111216　第十講まで完成。中間試験の解答例、採点基準などを http://ppwww.phys.sci.kobe-u.ac.jp/~miuchi/education/education.htm からたどれるようにしました。
  - 20111222　第11講まで完成。流体まとめ地図を追加。
  - 20120112　第12講まで完成。
  - 21120117　第14項まで完成。熱力学まとめ地図を追加。
  - 21120125　第14項修正。

- 本講義のめざすところ（物理を専門としない学生の為の物理）
  - 文字で説明された物理現象を図にする
  - 図から方程式（主に運動方程式）を立てる
  - （方程式を解く:ここはそれほど重視しない。試験でも。）
  - 得られた式に含まれる変数への依存を考慮する。グラフは良い手段。
  - 得られた解に現実的な数値を入れて計算する

- 一般の物理量は基本単位（質量M　長さL　時間T）のべきを用いて表わされる。
  $A=L^{[L]}M^{[M]}T^{[T]}$
- このべきを次元と呼ぶ。

次元テーブル

[M]=1	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0	ρ（密度）		σ（線密度）				
-1					運動量		
-2			応力 ヤング率	k(ばね定数)	力	エネルギー	

[M]=0	-3	-2	-1	[L]=0	1	2	3
2							
1							
[T]=0					x	S	V
-1				ω　γ	v		
-2					a		

物理学C2　講義メモ
（オリジナル：川越清以　tweet：身内賢太朗）

「教科書」＝「基礎物理学 I」　後藤憲一他編。

$\boxed{}$ でだしの式

$\boxed{}$ 途中の大事な式

$\boxed{}$ 行きつく式

緑⇒赤の変形よりも
赤の式を解釈する、使い倒す
ことに重点を置きたい

第1章　振動と波動

<<第1講>>

1.1　単振動と減衰振動（復習）

（教科書95ページに至るまで。）

質量 m の粒子のバネの力 $-kx$ による1次元の運動を考える。x はバネの自然長からの変位。k はバネ定数。

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx} \tag{1.1}$$

この方程式の独立な解は $x = e^{\alpha t}$ とおくことで求められる。

$$(\alpha^2 + k/m)x = 0 \tag{1.2}$$

すなわち $x = e^{\pm i\omega t}$, $\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$ が独立な解である。オイラーの公式

(1.2.1)　　ω：振動数　この先よく出て来るパラメータ

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{1.3}$$

次元は1/T　で　ωtで[rad]となる。

を用いて、実数の解を求めると、次のようになる。

$$x_1(t) = \cos\omega t \tag{1.4}$$
$$x_2(t) = \sin\omega t \tag{1.5}$$

一般解は、独立な解の線形結合であり、

$$\begin{aligned} x &= Ax_1(t) + Bx_2(t) \\ &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ &= \boxed{C\cos(\omega t + \phi_0)} \\ &= D\sin(\omega t + \psi_0) \end{aligned} \tag{1.6}$$

味わう：D、ψ、ωなどの次元
絵を書いてみる。x=f(t)

単振動は「正弦波」
「振幅」と「位相」が性質を決める。
（=2つのフリーパラメータ）

と書ける。一般解はいろいろな書き方があるが、必ず二個の積分定数を含む。この積分定数は、初期条件で決定できる。

「ダンパー」、「ショックアブソーバー」など。
速度に比例する「運動を止める力」が働く。

次に、速度に比例する力 $-m\gamma\dot{x}$ が働く場合を考えると、運動方程式は次のようになる。

$$\boxed{m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - kx} \tag{1.7}$$

上と同様に $x = e^{\alpha t}$ とおくと、

$$(\alpha^2 + \gamma\alpha + k/m)x = 0 \tag{1.8}$$

α に関する 2 次方程式の判別式が負の時、すなわち

$$D = \gamma^2 - 4k/m < 0 \tag{1.9}$$

のとき減衰振動となる。すなわち、$\alpha = (-\gamma \pm i\sqrt{-D})/2 = -\gamma/2 \pm i\omega$, $\omega = \sqrt{-D}/2 = \sqrt{k/m - (\gamma/2)^2}$。であり、実数解を考えると、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-\gamma t/2}\cos\omega t & (1.10) \\ x_2(t) &= e^{-\gamma t/2}\sin\omega t & (1.11) \end{aligned}$$

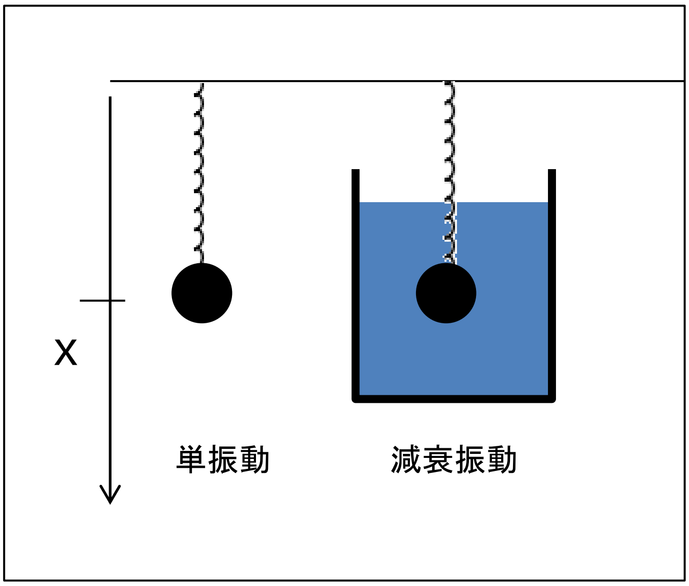
が独立な解となる。一般解はやはり独立な解の線形結合であり、

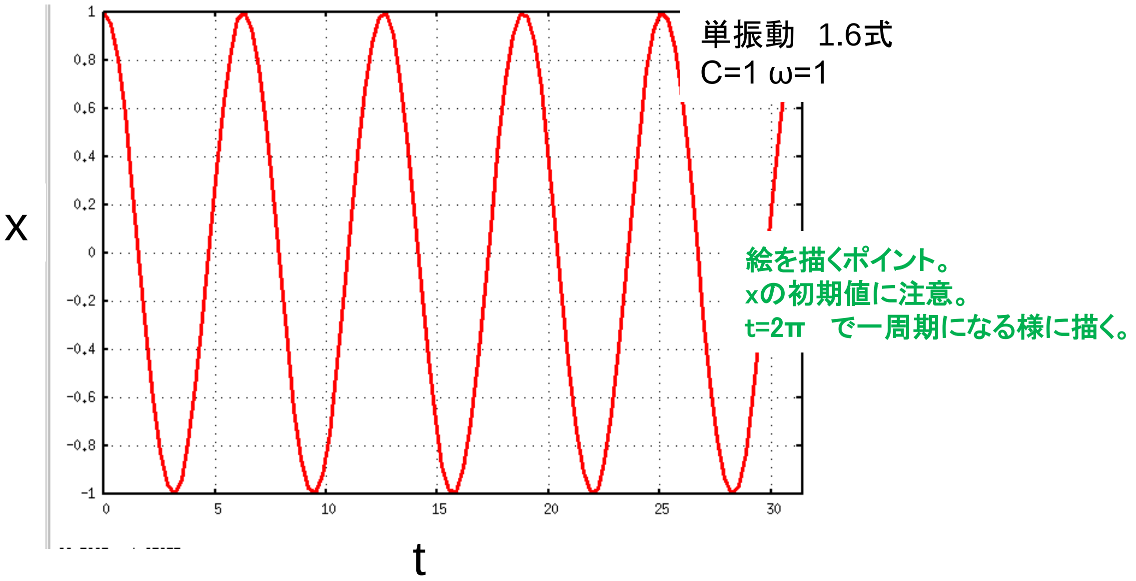
$$\begin{aligned} x &= e^{-\gamma t/2}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) & (1.12) \\ &= \boxed{Ce^{-\gamma t/2}\cos(\omega t + \phi_0)} & (1.13) \\ &= De^{-\gamma t/2}\sin(\omega t + \psi_0) & (1.14) \end{aligned}$$

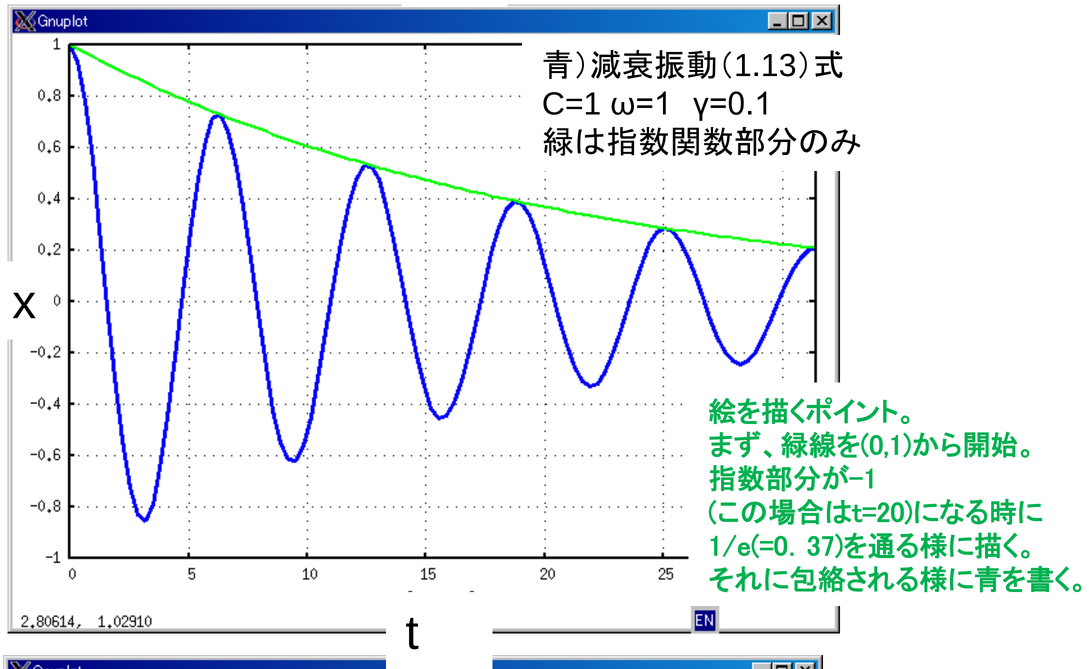
単振動にexpで減衰する成分がかかる。

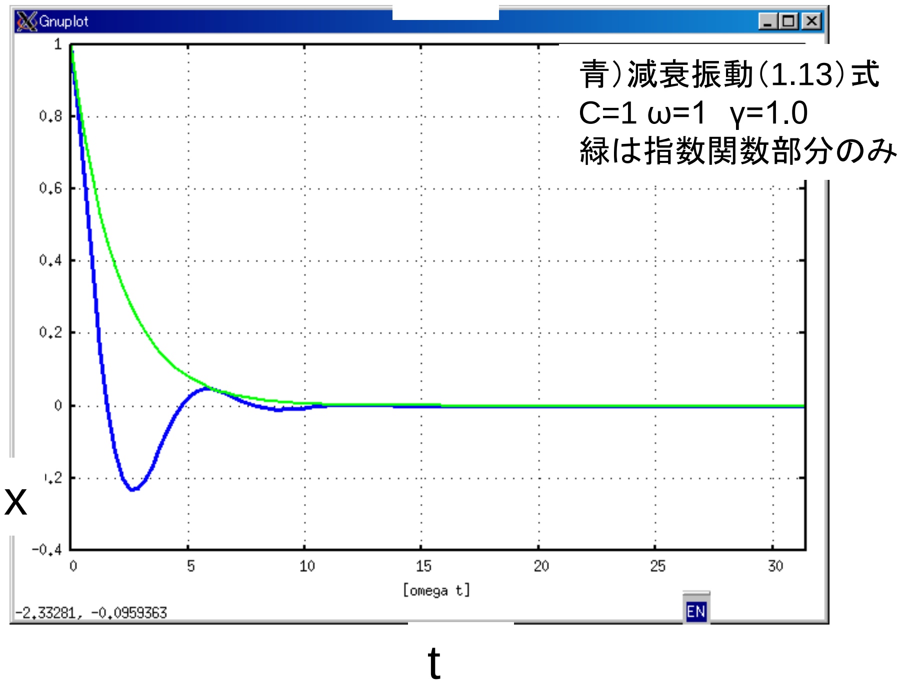
(1.13)式を味わう：(1.6)式との比較やγ の次元を解析してみる。 など

と書ける。やはり二個の積分定数を含んでおり、初期条件で決定できる。




単振動　1.6式
C=1 ω=1
x
t
絵を描くポイント。
xの初期値に注意。
t=2π　で一周期になる様に描く。


Gnuplot
青）減衰振動（1.13）式
C=1 ω=1　γ=0.1
緑は指数関数部分のみ
x
t
2.80614, 1.02910
絵を描くポイント。
まず、緑線を(0,1)から開始。
指数部分が−1
(この場合はt=20)になる時に
1/e(=0. 37)を通る様に描く。
それに包絡される様に青を書く。


Gnuplot
青）減衰振動（1.13）式
C=1 ω=1　γ=1.0
緑は指数関数部分のみ
x
[omega t]
-2.33281, -0.0959363
t

1.12.1 ホイヘンスの原理

（教科書111ページ〜）
高校の復習なので、先にやっつけてしまおう。

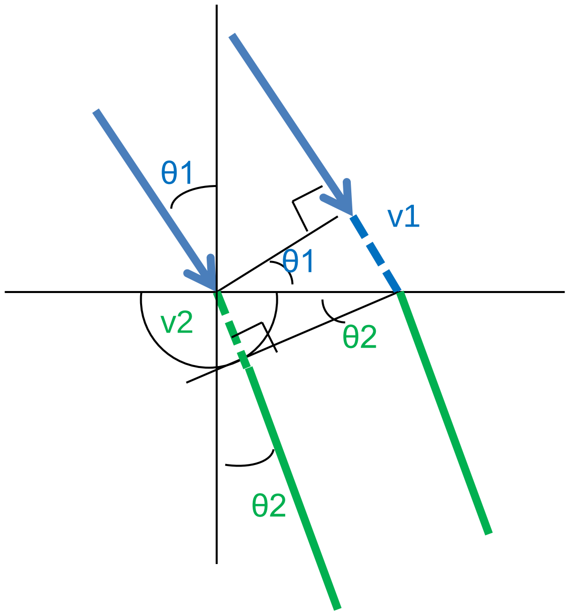
ある瞬間に波面の各点から球面波 (素元波) がでてその媒質における速さで広がると考え、波の進む前方で、それらに共通に接する面 (包絡面) が次の瞬間の波面になる。

1.12.2 反射と屈折

媒質 1(波の速さ v_1、波長 λ_1) から媒質 2(波の速さ v_2、波長 λ_2) に入射角 θ_1 で入射。反射角、屈折角を θ_1'、θ_2 とすると、次の関係が成り立つ。

$$\theta_1 = \theta_1' \tag{1.171}$$

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{1.172}$$



ホイヘンスの原理
と屈折の法則

1.12.3　回折

波が物体にあたると、その蔭になるところまで波が回り込む。また、隙間をあけた板に当てると、隙間を通り抜けて板の蔭にあたるところまで波が回り込む。この現象を回折と言い、ホイヘンスの原理から説明される。隙間の大きさが波長に比べて小さいほどこの現象が目立つ。

1.12.4　ドップラー効果

波が空間を伝わるとき、波源や観測者が運動していると、波の振動数が変化して観測される。

$$\boxed{\nu' = \frac{v - v_O}{v - v_S}\nu} \tag{1.173}$$

ν' は観測者から見た波の周波数、ν は観測者も波源も静止しているときの周波数である。また、v は波の速さ、v_O は観測者の速度、v_S は波源の速度である。

- 観測者と波源が静止しているときの波長、周波数、早さの関係は

$$v = \lambda\nu \tag{1.174}$$

- 波源が静止しているときの波長を λ とすると、波源の前方では波長が $(v - v_S)/v$ 倍になる。

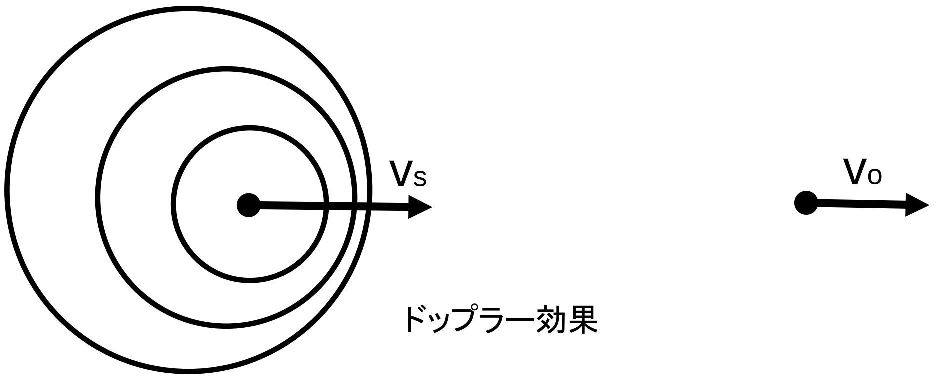
$$\lambda' = \lambda(v - v_S)/v \tag{1.175}$$

- 観測者が運動していると、観測者に対する波の相対速度は

$$v' = v - v_O \tag{1.176}$$

- よって、観測者から見た周波数は

$$\nu' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v - v_O}{v - v_S}\frac{v}{\lambda} = \frac{v - v_O}{v - v_S}\nu \tag{1.177}$$



ドップラー効果

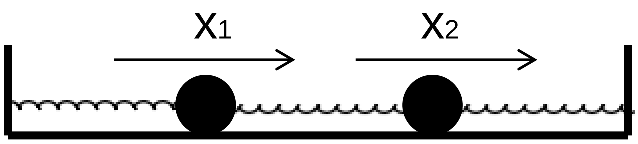
<<第1講終わり>>

<<第2講>>

1.2　連成振動（教科書98ページ〜）

二個の質量 m の粒子が 3 つのばねで両側の壁とつながれている。運動方程式は次の通り。

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -k_2(x_2 - x_1) - k_1x_2 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1.15) \\ (1.16) \end{aligned}$$



単振動　　　減衰振動

これらの式の和と差をとると、

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k_1(x_1 + x_2) \qquad (1.17)$$

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -(k_1 + 2k_2)(x_2 - x_1) \qquad (1.18)$$

ここで $u_1 = x_1 + x_2,\ u_2 = x_2 - x_1$ と置き換えると、

$$m\ddot{u}_1 = -k_1u_1 \qquad (1.19)$$

$$m\ddot{u}_2 = -(k_1 + 2k_2)u_2 \qquad (1.20)$$

振動数の大きい方をω2　小さい方をω1とおいた。

よって、$\omega_1^2 = k_1/m,\ \omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/2 > \omega_1^2$ として、基準振動が求まる。

$$u_1 = A_1\sin(\omega_1t + \phi_1) \qquad (1.21)$$

$$u_2 = A_2\sin(\omega_2t + \phi_2) \qquad (1.22)$$

元の振動の解は、ふたつの基準振動の重ね合わせになる。

$$\begin{aligned} x_1 &= (u_1 - u_2)/2 \\ &= \boxed{(A_1\sin(\omega_1t + \phi_1) - A_2\sin(\omega_2t + \phi_2))/2} \qquad (1.23) \\ x_2 &= (u_1 + u_2)/2 \\ &= \boxed{(A_1\sin(\omega_1t + \phi_1) + A_2\sin(\omega_2t + \phi_2))/2} \qquad (1.24) \end{aligned}$$

4つのフリーパラメータ

以下「味わう」

初期条件として $x_1 = a > 0, x_2 = 0, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ をとると、

$$
\begin{aligned}
(A_1 \sin\phi_1 - A_2 \sin\phi_2)/2 &= a && (1.25)\\
(A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2)/2 &= 0 && (1.26)\\
(A_1\omega_1 \cos\phi_1 - A_2\omega_2 \cos\phi_2)/2 &= 0 && (1.27)\\
(A_1\omega_1 \cos\phi_1 + A_2\omega_2 \cos\phi_2)/2 &= 0 && (1.28)
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
A_1 \sin\phi_1 = -A_2 \sin\phi_2 &= a && (1.29)\\
A_1\omega_1 \cos\phi_1 = A_2\omega_2 \cos\phi_2 &= 0 && (1.30)
\end{aligned}
$$

となり、$A_1 = a,\ A_2 = -a$ および $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$ が得られる。よって、この初期条件に対する解は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \frac{a}{2}\begin{pmatrix} \cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t \\ \cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t \end{pmatrix} && (1.31)\\
&\boxed{= a\begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t) \\ \sin(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t)\sin(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t) \end{pmatrix}} && (1.32)
\end{aligned}
$$

k_2 が k_1 に比べて小さいとき、$(\omega_1+\omega_2)/2 \gg (\omega_2-\omega_1)/2$ である。x_1, x_2 の振幅の大きさが角速度 $(\omega_2-\omega_1)/2$ でゆっくりとそれぞれ振動し、$x_1 \leftrightarrow x_2$ で交互に入れ替わっている。

　最後の部分で、三角関数の加法定理を使った。

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta && (1.33)\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta && (1.34)\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta && (1.35)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta && (1.36)
\end{aligned}
$$

結果の式を見ても何も面白くない。
次ページの絵を参照。

最初の 2 式の和をとって

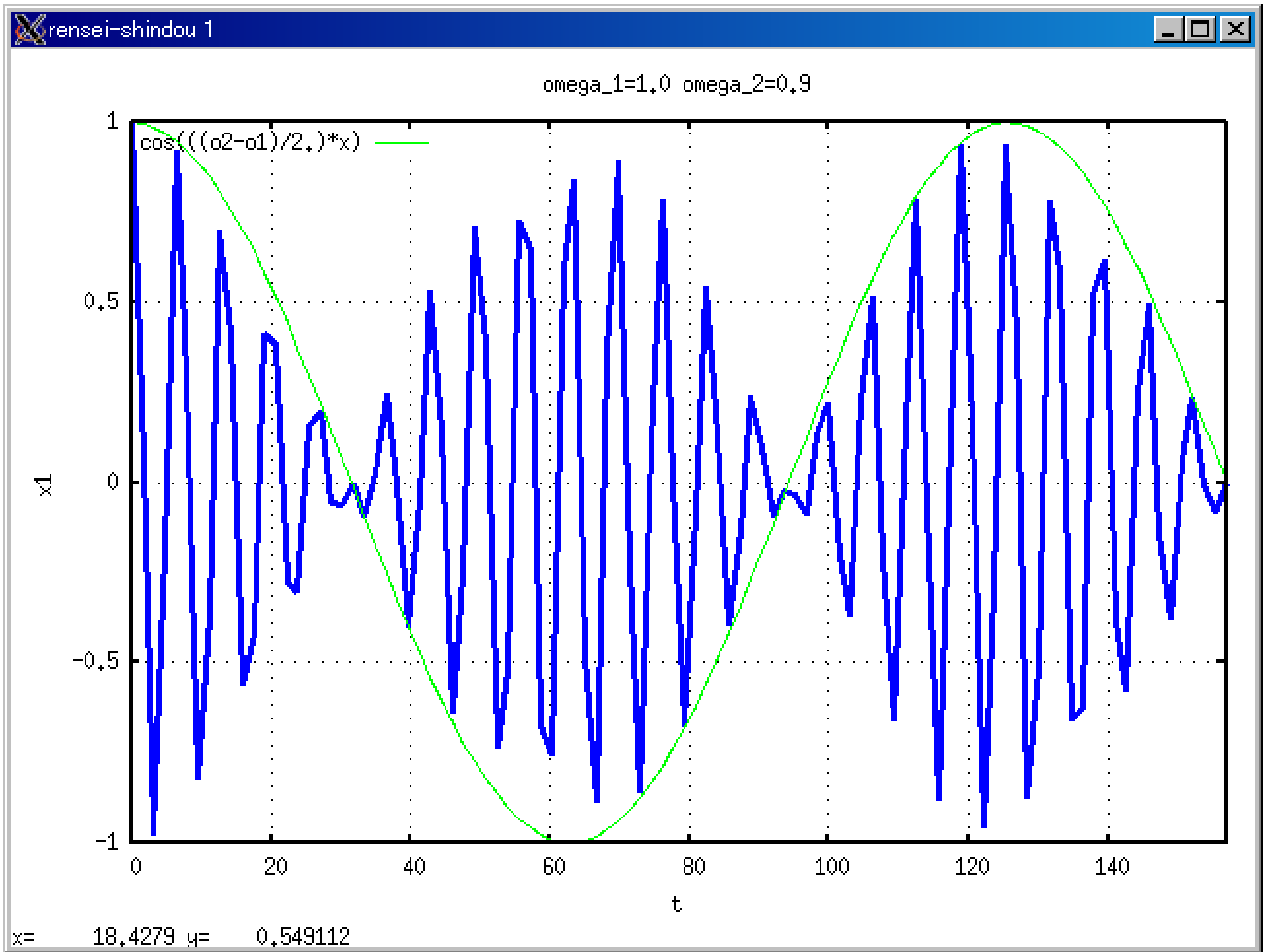
$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \qquad (1.37)$$

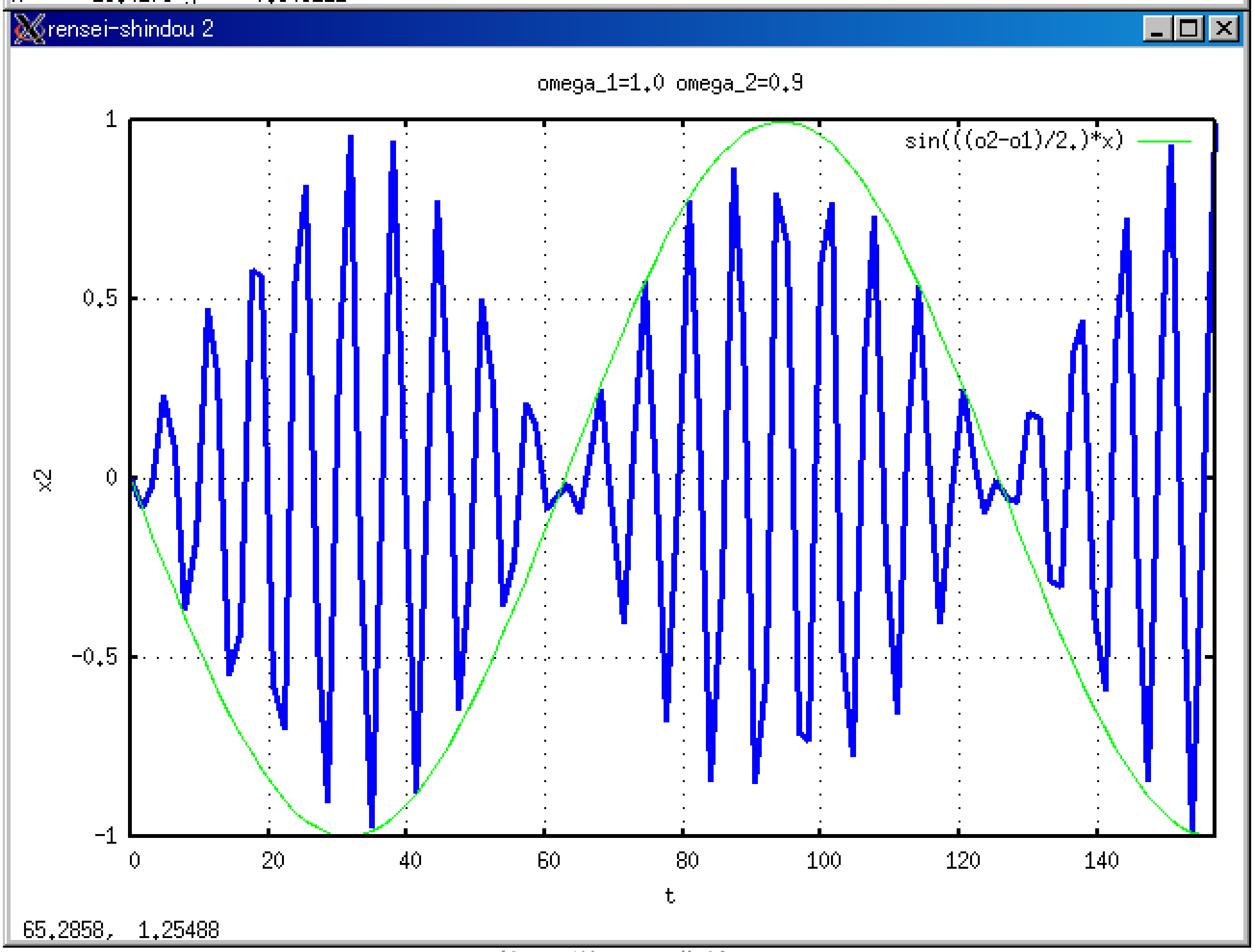
$A = \alpha+\beta, B = \alpha-\beta$ とおくと $\alpha = (A+B)/2,\ \beta = (A-B)/2$ となるので、

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \qquad (1.38)$$

の関係を得る。同様にして、以下の 3 式も得られる。

$$
\begin{aligned}
\sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} && (1.39)\\
\cos A + \cos B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} && (1.40)\\
\cos A - \cos B &= -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} && (1.41)
\end{aligned}
$$


rensei-shindou 1
omega_1=1.0 omega_2=0.9
cos(((o2-o1)/2.)*x)
x1
t
x= 18.4279 y= 0.549112


rensei-shindou 2
omega_1=1.0 omega_2=0.9
sin(((o2-o1)/2.)*x)
x2
t
65.2858, 1.25488

1.3　振動の合成とうなり　（教科書96ページ～）

より一般的に振動の重ね合わせを考えてみる。

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) && (1.42)\\
x_2 &= a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) && (1.43)\\
x &= x_1 + x_2 \\
&= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) && (1.44)
\end{aligned}
$$

1. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ のとき、

$$
\begin{aligned}
x &= a_1(\sin\omega t\cos\phi_1 + \cos\omega t\sin\phi_1) + a_2(\sin\omega t\cos\phi_2 + \cos\omega t\sin\phi_2)\\
&= (a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)\sin\omega t + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)\cos\omega t\\
&= \boxed{a\sin(\omega t + \phi)} && (1.45)
\end{aligned}
$$

なんてことはない。位相が変わるだけ。

となる。ここで、

$$
\begin{aligned}
a^2 &= (a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2)^2 + (a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2)^2\\
&= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_1 - \phi_2) && (1.46)\\
\tan\phi &= \frac{a_1\sin\phi_1 + a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1 + a_2\cos\phi_2} && (1.47)
\end{aligned}
$$

2. $\omega_1 \sim \omega_2$ のとき。簡単のため、$a_1 = a_2 = a$ の場合を考えると、

$$
\begin{aligned}
x &= a\sin(\omega_1 t + \phi_1) + a\sin(\omega_2 t + \phi_2)\\
&= 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\\
&\quad \times \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) && (1.48)
\end{aligned}
$$

教科書　図5-2

ここで、

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad (1.49)$$

であることに注意すると、振動の振幅がゆっくりと角速度 $|\omega_1 - \omega_2|/2$ で変化していくことがわかる。これをうなりと言う。もとの振動の振動数をそれぞれ $\nu_1 = \omega_1/2\pi, \nu_2 = \omega_2/2\pi$ とすると、うなり回数（山と谷の回数）は次のようになる。

こういった解釈が重要

$$\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right|/\pi = |\nu_1 - \nu_2| \qquad (1.50)$$

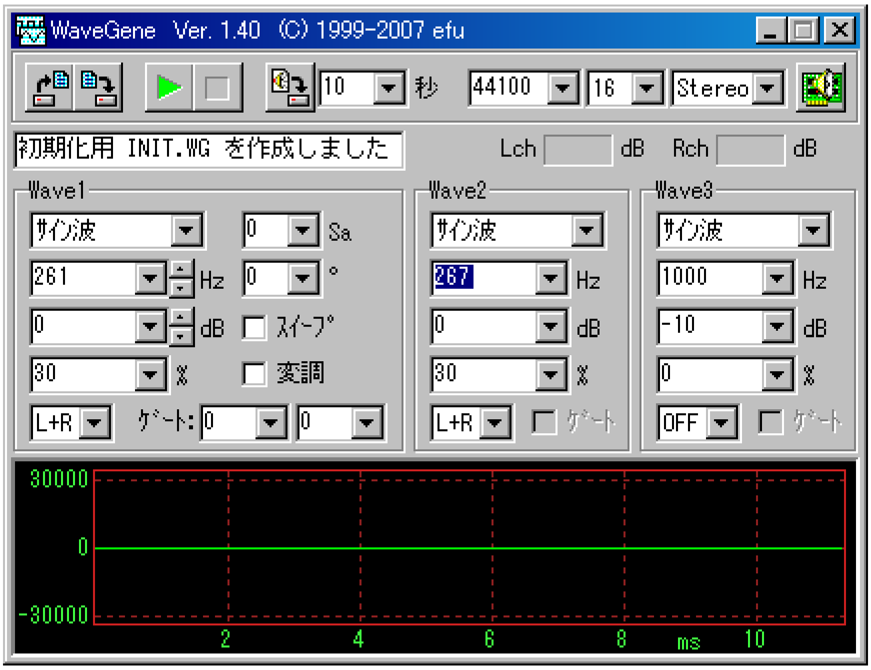
cosの項の山から山まではπ　（ =(ω_1-ω_2) t_0　/2)　 ここでうなりの周期をt_0とした。
うなりの回数（＝1/t_0 としてあらわされるので） (1.50)を得る。

- うならせてみたいもんだ

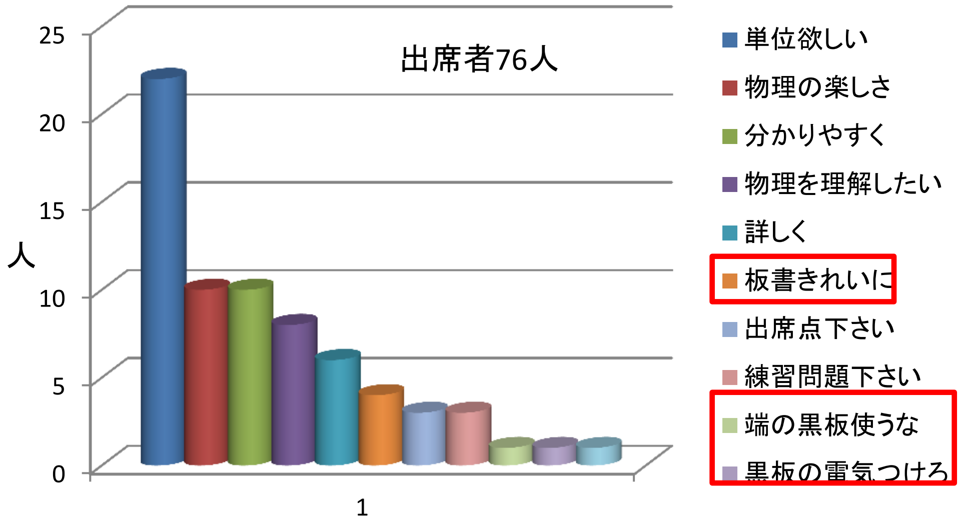
音の周波数（理科年表より）：

C　261.63 Hz
C#　277.18 Hz
D　293.66 Hz
D#　311.13 Hz
E　329.63 Hz
F　349.23 Hz
F#　369.99Hz
G　392.00Hz
G#　415.30 Hz
A　440.00 Hz
A#　466.16 Hz
H　493.88 Hz
C　523.25　Hz

この二つの差は　6Hz程度=　0.2秒



- 初回アンケート結果



ご意見ありがとうございます。
授業中でも遠慮なく言ってください。

努力すれば単位取れて、

物理の楽しさを伝えながら、分かりやすく、

時々詳しく

物理を「分かる」事のポイントは

「上から目線」

（身内私見）

1.4　強制振動と共鳴現象 教科書該当ページないのでスキップ

$\dot{x}$ に比例する力（抵抗力）、x に比例する力（バネの力）に加えて、更に時間に依存する外力 $F(t)$ が加わる。運動方程式は次のようになる。

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - m\gamma\dot{x} + F(t)} \tag{1.51}$$

これを書き直して、

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \tag{1.52}$$

ここで、$F(t) = mf(t)$、$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ とした。これを強制振動という。また、方程式について、次のような呼び方をする。

$f(t) = 0$ 斉次線形微分方程式

$f(t) \neq 0$ 非斉次線形微分方程式

非斉次線形微分方程式の一般解は
（非斉次線形微分方程式の特解）+（斉次線形微分方程式の一般解）
である。
[証明]
$L = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}$（演算子）とすると、

1. $Lx_G = 0$（斉次線形微分方程式の一般解）
2. $Lx_S = f(t)$（非斉次線形微分方程式の特解）

よって、$x = x_G + x_S$ とすると、

$$Lx = L\left(x_G + x_S\right) = Lx_G + Lx_S = f(t) \tag{1.53}$$

（証明終）

（証明終）

以下は $F(t)=mf(t)=mf_0\cos(\omega t+\Delta)$ とし、抵抗力のある振動系の場合を考える。

運動方程式は

$$m\ddot{x}=-kx-m\gamma\dot{x}+F_0\cos(\omega t+\Delta) \tag{1.54}$$

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=f_0\cos(\omega t+\Delta) \tag{1.55}$$

これの特解を求めるには、$x=A\cos(\omega t+\Delta)$ とおいてもうまくいかな

$$\tan\delta=\frac{\omega^2-\omega_0^2}{\gamma\omega} \tag{1.61}$$

$\omega_0>\gamma/2$ のときの一般解は、

$$\begin{aligned} x(t) &= f_0\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t+\Delta+\delta) \\ &+ e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C\cos\omega_1 t+D\sin\omega_1 t) \end{aligned} \tag{1.62}$$

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \tag{1.63}$$

$\gamma t/2$ が十分大きければ、一般解は特解に収束する。

$$(\text{振幅})^2\propto\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \tag{1.64}$$

であり、これを Breit-Wigner 関数という。

RLC 回路

$$Q = CV_C \tag{1.65}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{1.66}$$

$$V_R = RI \tag{1.67}$$

$$V_L = L\frac{dI}{dt} \tag{1.68}$$

$$V_c+V_R+V_L=V(t) \tag{1.69}$$

$$\frac{1}{C}Q+R\frac{dQ}{dt}+L\frac{d^2Q}{dt^2}=V(t) \tag{1.70}$$

も同じ方程式になる。

力学的な問題を電気回路の問題と読み変えて、シミュレートすることも可能である。

1.5　波動　（教科書99ページ～）

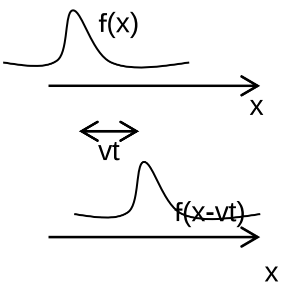
波動　ある時空 (x,t) における変動が、時間がたつにつれて周囲の他の場所に伝わる現象。

xが入るのが振動との違い

媒質　波動を伝える物質。(注意：光（電磁波）は物質のない真空中でも伝わる。)

縦波と横波　変動が方向を持つとき、その方向が波動の進行方向と平行 (垂直) ならば、縦波 (横波) という。例として、棒を伝わる縦波や弦を伝わる横波がある。

波形　時刻 $t=0$ で変動が $u_0 = u(x,0) = f(x)$ であり、その形を維持したまま速度 $v>0$ で $+x$ 方向に進む波は



座標変換を思い出そう。

$$\boxed{u(x,t) = f(x - vt)} \tag{1.71}$$

思い出せなかったらこのまま覚えてしまおう。

とかける。逆方向、すなわち $-x$ 方向に進む波は次のように書ける。

$$\boxed{u(x,t) = f(x + vt)} \tag{1.72}$$

パルスと波束　$u_0 = f(x)$ がひとつの山しか持たなければ、$u(x,t) = f(x \pm vt)$ はその山が速さ v で伝わる波を表し、これをパルスと言う。また、限られた範囲だけで $u \neq 0$ のとき、この波動を波束と言う。

正弦波　$u_0 = f(x)$ が正弦関数の場合、

$$\begin{aligned} u(x,t) &= a\sin(\omega(t - x/v) + \phi) && (1.73)\\ &= a\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi\right\} && (1.74)\\ &= a\sin(\omega t - kx + \phi) && (1.75) \end{aligned}$$

などと書ける。ここで a: 振幅 ω: 角振動数（角速度）ϕ: 初期位相 (sin のなかは位相) であり、

ωの定義（1.2）式を思い出すと分かる。

周期と振動数の関係

直感的な関係式
v=ν λ
速度=時間当たりの個数×波長
から導ける。

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\omega}{2\pi} && (1.76)\\ T &= \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} && (1.77)\\ \lambda &= \frac{v}{\nu} && (1.78)\\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} && (1.79) \end{aligned}$$

ωtとkxを同じ様に扱える様に定義した

をそれぞれ、振動数、周期、波長、波数とよぶ。

<<第2講終わり>>

<<第3講>>

1.6　波動方程式

（教科書101ページ〜）

$f(\xi)$ と $g(\xi)$ を２階微分可能な関数とすると、

$$u(x,t)=f(x-vt) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.80}$$

$$u(x,t)=g(x+vt) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.81}$$

1.71式、「波」の式を2階微分してみるとこうなる。

なので、その線形結合も同じ偏微分方程式を満たす。

$$u(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt) \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{1.82}$$

両辺とも次元T^-2

この偏微分方程式を波動方程式と呼ぶ。この偏微分方程式の一般解が上記のようになることを示そう。 逆をやってもそうなるので、1.82は波の式「波動方程式」といえる。

$$\xi = x-vt \tag{1.83}$$

$$\eta = x+vt \tag{1.84}$$

とおくと、

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x}=1 \tag{1.85}$$

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}=v \tag{1.86}$$

であり、$u=u(x,t)$ の偏微分を計算していくと、

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta} \tag{1.87}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\end{aligned} \tag{1.88}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=v\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{1.89}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= v\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} \\ &= v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)\end{aligned} \tag{1.90}$$

となるので、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{1.91}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0 \to \frac{\partial u}{\partial \xi} = f'(\xi) \tag{1.92}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \to \frac{\partial u}{\partial \eta} = g'(\eta) \tag{1.93}$$

となるので、$f'(\xi)$ は η によらない ξ の任意の関数、そして $g'(\eta)$ は ξ によらない η の任意の関数でなくてはならない。u はそれらを積分した $f(\xi)$ と $g(\eta)$ の線形結合になる。

$$\begin{aligned} u &= f(\xi) + g(\eta) \\ &= f(x - vt) + g(x + vt) \end{aligned} \tag{1.94}$$

1.7　重ねあわせの原理　（教科書102ページ）

$u_1(x,t)$ と $u_2(x,t)$ がともに 1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.95}$$

を満たすなら、その和 $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ も同じ波動方程式の解である。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial t^2} \tag{1.96}$$

$$= \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tag{1.97}$$

$$= v^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \tag{1.98}$$

$$= v^2 \frac{\partial^2 (u_1 + u_2)}{\partial x^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.99}$$

直感的には当たり前のことをもっともらしく説明。

「いくつかの波が伝わってきたとき、各点でそれぞれの波が単独に来た場合の変位（変動）の和を変位（変動）とする波になる。」

　また、波の重ねあわせで強めあったり弱めあったりすることを波の干渉という。

1.12 2次元と3次元の波動

波が2次元的あるいは3次元的につたわる。

波面 振動の位相の等しい面。

平面波 波面が平面。

球面(円面)波 波面が球面(円面)。

2次元、3次元の波動方程式は次のように書ける。 (1.80)の拡張

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.169}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)} \tag{1.170}$$

図解

「線密度σ」といきなり言われた時点で、いやになるよな。
「長さあたりの質量」もっというと、「長さをかければ質量になる値」だから、次元M/L

1.8 弦を伝わる横波 （教科書103ページ）

一様な線密度 σ の弦を張力 T で張り、横の変位を与える。横の変位を $u = u(x,t)$ とする。変位が微少で、σ と T の変化も無視できるとする。$(x, x+\Delta x)$ の微少区間 AB の部分を考え、弦と x 軸がなす角度を θ とすると、A, B 地点で弦に働く張力は

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_A &= (-T\cos\theta, -T\sin\theta) \sim -(T, T\tan\theta) \\ \vec{F}_B &= (T\cos(\theta+\Delta\theta), T\sin(\theta+\Delta\theta)) \\ &\sim (T, T\tan(\theta+\Delta\theta))\end{aligned}} \quad \begin{aligned}&(1.100)\\ \\ &(1.101)\end{aligned}$$

ここで $|\theta| \ll 1$ のときの近似

$$\cos\theta \sim 1 \quad (1.102)$$
$$\sin\theta \sim \tan\theta \quad (1.103)$$

を使った。$\tan\theta$ は弦と x 軸のなす角度だから、

$$\tan\theta \sim \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \quad (1.104)$$
$$\tan(\theta+\Delta\theta) \sim \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \quad (1.105)$$

である。よって u 方向の運動方程式を立てると、

$$\begin{aligned}\boxed{\sigma\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\tan(\theta+\Delta\theta) - T\tan\theta} \\ = T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] \\ = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Delta x \quad (1.106)\end{aligned}$$

すなわち、

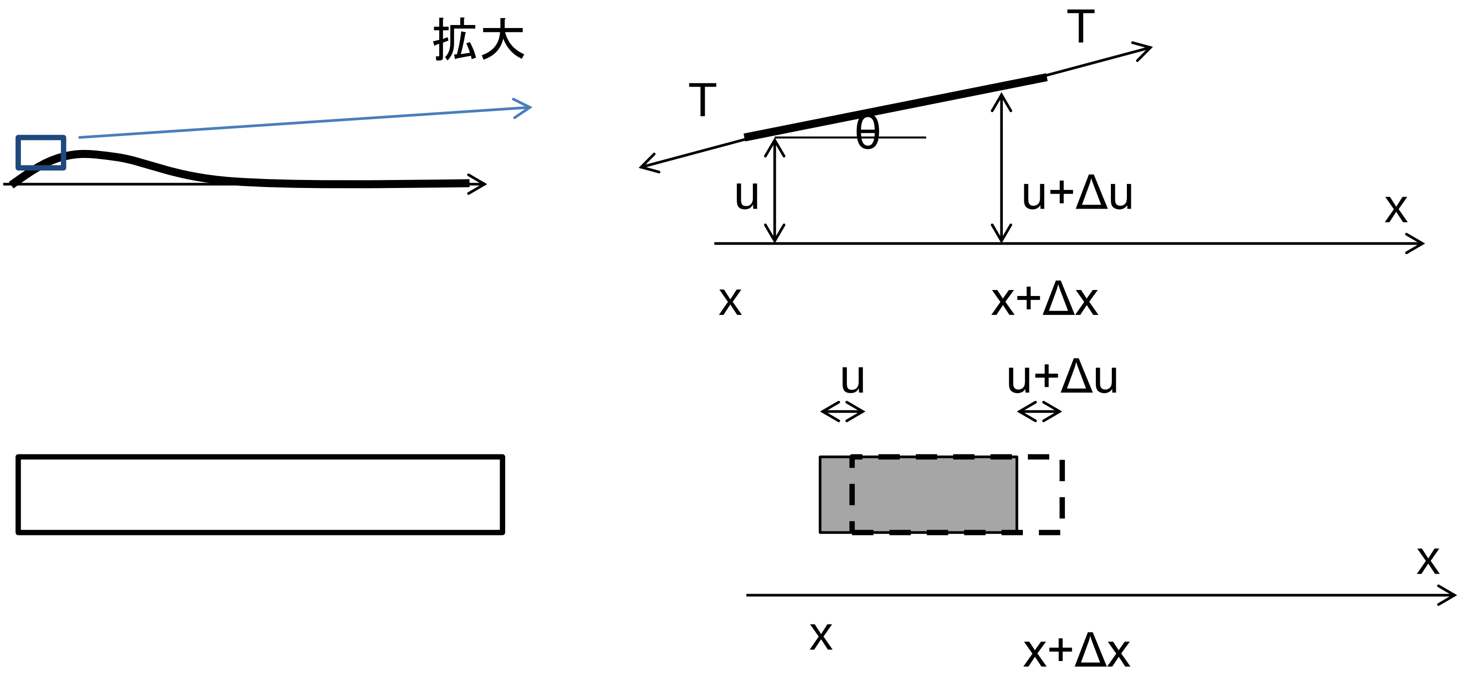
$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (1.107)$$

という波動方程式になる。前に示した波動方程式と比較すると、

$$v^2 = \frac{T}{\sigma} \to v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (1.108)$$

次元を確認してみよう

となるので、弦の線密度と張力で波の進む速さが決まる。



- 1.8.2　棒を伝わる縦波
  - 密度ρ　ヤング率Eの一様な棒の一端を縦方向にたたいた時の縦方向の変位を考える。
  - ヤング率の定義：$F/S=E\varepsilon$　　F/S（垂直応力）　$\varepsilon=u/l$（変位）
  - 運動方程式　$F=\ SE\ \ \partial u/\partial x$
  - 働く力は　$SE((\partial u/\partial x)_{x+\Delta x} - (\partial u/\partial x)_x\ )=\ SE\ \ (\partial^2 u/\partial x^2)\Delta x$

    運動方程式は　　$\rho S\Delta x\ \ \partial^2 u/\partial t^2\ =\ SE\ \ (\partial^2 u/\partial x^2)\Delta x$

    なので、$v=\sqrt{(E/\rho)}$　となる。
  - こうした波は、内部の変位が弾性によって戻る力によって生ずる⇒弾性波

- ざっくりとした計算（地震波の速度）
（実際には「ポアソン比」などを入れて詳細に計算する必要あり）
  - 花崗岩の弾性率（～ヤング率） 10～100GPa程度
  - マントルの密度 ρ=3g/cm^3程度

⇒縦波として計算してみよう。

  - 100GPa=10^11Pa～10^6kgf/cm^2～10^10 kgf/m^2 ～ 10^10 kg m/s^2 /m^2 ～10^10 kg /s^2/m
  - 3g/cm^3=3×10^（-3) kg/cm^3=3×10^3 kg/m^3
  - √（E/ρ） に代入 1.7km/s となる
  - 実際の地震縦波(p波) ： 7km/s ものすごく単純なモデルとしてはオーダーOK
  - 地震横波(s波) 4km/s
  - 予告：縦波の速度＞横波の速度 は第7講で行います。

<<第3講終わり>>

<<第4講>>

1.9 波のエネルギーと強さ （教科書107ページ）

弦を伝わる横波の波の変位を

$$u(x,t) = a\sin(\omega(t - x/v) + \phi) \tag{1.109}$$

とすると、単位長さあたりの運動エネルギーは

$$\begin{aligned} U_K &= \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma\left(a\omega\cos(\omega(t-x/v)+\phi)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma a^2\omega^2\cos^2(\omega(t-x/v)+\phi) \end{aligned} \tag{1.110}$$

一方、波のポテンシャルエネルギーは、波の通過に伴う微少部分の伸長によって決まる。長さ ℓ_0 の部分の伸び $\Delta\ell$ は 図解

$(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x$（$x<<1$の時） を使った。

$$\delta\ell = \ell_0\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} - \ell_0 \sim \frac{1}{2}\ell_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{1.111}$$

よって、弦の張力を T として波のする仕事を考えると、単位長さあたりのポテンシャルエネルギーは

位置エネルギー：Fx

$$\begin{aligned} U_P &= \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}T\left(-\frac{a\omega}{v}\cos(\omega(t-x/v)+\phi)\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}T\frac{a^2\omega^2}{v^2}\cos^2(\omega(t-x/v)+\phi) \\ &= \frac{1}{2}\sigma a^2\omega^2\cos^2(\omega(t-x/v)+\phi) = U_K \end{aligned} \tag{1.112}$$

最後に $v = \sqrt{T/\sigma}$ の関係を使った。

１周期について平均を取ると、

$$\bar{U}_K = \bar{U}_P = \frac{1}{4}\sigma a^2\omega^2 \tag{1.113}$$

cos²θを0から2πまで積分するとπを使う

また、力学的エネルギーの平均値は

$$\bar{U} = \bar{U}_K + \bar{U}_P = \frac{1}{2}\sigma a^2\omega^2 \tag{1.114}$$

となる。これに波の速さ v をかけたものが波が進行方向に単位時間に運ぶエネルギーであり、波の強さという。

$$\boxed{I = v\bar{U} = \frac{1}{2}v\sigma a^2\omega^2} \tag{1.115}$$

線密度に比例
振幅の2乗に比例
振動数の2乗に比例

cos²θの積分値とsin²θの積分値が等しいから、、、

1.10　正弦波の反射と透過　（教科書108ページ～）

ある媒質 A から別の媒質 B に波が入射すると、波の反射と透過が起きる。反射波と透過波の角振動数は入射波のものと等しい。また、反射波の速さは入射波の速さに等しい。入射波、反射波、透過波をそれぞれ u_0, u_1, u_2 とする。

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= a\sin(\omega t - k_1 x) \\ u_1 &= a_1\sin(\omega t + k_1 x + \phi_1) \\ u_2 &= a_2\sin(\omega t - k_2 x + \phi_2) \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1.116) \\ (1.117) \\ (1.118) \end{aligned}$$

$x < 0$ で　目的：適当な条件下でa1、a2、Φ1、Φ2をa、k1、k2あたりを用いて表す。

$$u = u_0 + u_1 = a\sin(\omega t - k_1 x) + a_1\sin(\omega t + k_1 x + \phi_1) \tag{1.119}$$

$x > 0$ で

$$u = u_2 = a_2\sin(\omega t - k_2 x + \phi_2) \tag{1.120}$$

$x = 0$ での連続性から、

$$a\sin\omega t + a_1\sin(\omega t + \phi_1) = a_2\sin(\omega t + \phi_2) \tag{1.121}$$

$$(a + a_1\cos\phi_1 - a_2\cos\phi_2)\sin\omega t + (a_1\sin\phi_1 - a_2\sin\phi_2)\cos\omega t = 0 \tag{1.122}$$

すなわち、次の条件が出る。

$$a_1\sin\phi_1 - a_2\sin\phi_2 = 0 \tag{1.123}$$

$$a + a_1\cos\phi_1 - a_2\cos\phi_2 = 0 \tag{1.124}$$

また、$x = 0$ で弦の傾きも等しくないと滑らかにつながらない。

$$-ak_1\cos\omega t + +a_1k_1\cos(\omega t + \phi_1) = -a_2k_2\cos(\omega t + \phi_2) \tag{1.125}$$

$$(-ak_1 + a_1k_1\cos\phi_1 + a_2k_2\cos\phi_2)\cos\omega t + (-a_1k_1\sin\phi_1 - a_2k_2\sin\phi_2)\sin\omega t = 0 \tag{1.126}$$

すなわち、次の条件が出る。

$$
\begin{aligned}
a_1 k_1 \sin\phi_1 + a_2 k_2 \sin\phi_2 &= 0 && (1.127)\\
-ak_1 + a_1 k_1 \cos\phi_1 + a_2 k_2 \cos\phi_2 &= 0 && (1.128)
\end{aligned}
$$

$\sin$ に関する２式から $\sin\phi_2$ を消去すると

$$
a_1(k_1+k_2)\sin\phi_1 = 0 \tag{1.129}
$$

よって

$$
\sin\phi_1 = \sin\phi_2 = 0 \tag{1.130}
$$

また、$\cos$ に関する式で $\cos\phi_1$ を消去すると、

$$
\cos\phi_2 = \frac{2ak_1}{a_2(k_1+k_2)} > 0 \tag{1.131}
$$

なので、$\boxed{\phi_2 = 0\text{。}\ \phi_1 = 0, \pi}$ である。
　$\phi_1 = 0\ (\cos\phi_1 = 1)$ のとき、

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}a = \frac{v_2-v_1}{v_1+v_2}a && (1.132)\\
a_2 &= \frac{2k_1}{k_1+k_2}a = \frac{2v_2}{v_1+v_2}a && (1.133)
\end{aligned}
}
$$

ここで、$k_1 = \omega/v_1,\ k_2 = \omega/v_2$ の関係を用いた。$\boxed{\phi_1 = \pi\ (\cos\phi_1 = -1)}$ のとき、

$$
\boxed{
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}a = \frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}a && (1.134)\\
a_2 &= \frac{2k_1}{k_1+k_2}a = \frac{2v_2}{v_1+v_2}a && (1.135)
\end{aligned}
}
$$

どちらの場合も、波の強さはそれぞれ、

$$
\begin{aligned}
I_r &= \frac{1}{2}v_1\sigma_1 a_1^2\omega^2 = \frac{1}{2}v_1\sigma_1\left(\frac{v_1-v_2}{v_1+v_2}\right)^2 a^2\omega^2 && (1.136)\\
I_t &= \frac{1}{2}v_2\sigma_2 a_2^2\omega^2 = \frac{1}{2}v_2\sigma_2\left(\frac{2v_2}{v_1+v_2}\right)^2 a^2\omega^2\\
&= \frac{1}{2}v_1\sigma_1\frac{4v_1v_2}{(v_1+v_2)^2}a^2\omega^2 && (1.137)
\end{aligned}
$$

(1.115) を用いた。

ここまで来て、出だしの気持ち悪さ、k2をinputパラメータとしたことに対して考察する。
(1.139),(1.140)より　R+T=1なので　どちらか一方をinputパラメータにできればよさそうだ。
たとえば、「反射率R」をinputパラメータにすれば、v2経由でk2が一意に決まるので、
出だしを「a,k1,Rを用いて、、、」という直感的に納得できる話にできる。

ここで、$T = \sigma_1 v_1^2 = \sigma_2 v_2^2$ の関係を用いた。

$$I_r + I_t = \frac{1}{2} v_1 \sigma_1 a^2 \omega^2 = I_0 \tag{1.138}$$

だから、エネルギーの流れはあっている。反射率と透過率はそれぞれ、次のようになる。

$$\text{Ir/Io} = R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2 \tag{1.139}$$

$$\text{It/Io} = T = \frac{4 v_1 v_2}{(v_1 + v_2)^2} \tag{1.140}$$

1.11　定常波（定在波） （教科書108ページ～）

$+x$ 方向に進む波と $-x$ 方向に進む振幅と角振動数の等しい正弦波の重ねあわせを考える（入射波と反射波を考えれば良い）。

$$u_1(x,t) = a \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_1\right\} \tag{1.141}$$

$$u_2(x,t) = a \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \phi_2\right\} \tag{1.142}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= 2a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \end{aligned} \tag{1.143}$$

ここで、三角関数の公式 $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ を使った。

このとき、位置 x では振幅 $2a\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$ の振動がおきる。この部分は時刻 t を含まないから、波の山や谷の位置は進行しない。この場合を定常波（定在波）という。振幅が 0 になる位置を節という。節の位置は、

xとtが別の三角関数に
入っている事がポイント
関数の形、解釈は、うなりの式
（1.48）に似ている。

$$2a \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 0 \tag{1.144}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\phi_1 - \phi_2}{4\pi}\right) = \frac{\pi}{2}(2n+1) \tag{1.145}$$

$$x - \frac{\phi_1 - \phi_2}{4\pi} = \frac{\lambda}{4}(2n+1) \tag{1.146}$$

ここで、n は整数。よって、$x_0 = (\phi_1 - \phi_2)\lambda/4\pi$ とすると、

$$\boxed{x - x_0 = \pm\frac{\lambda}{4}, \pm\frac{3\lambda}{4}, \pm\frac{5\lambda}{4}, \ldots} \tag{1.147}$$

節間隔は　$\lambda/2$

が節の位置である。一方、振幅が最大になる位置を腹といい、

$$
\boxed{\begin{aligned} x - x_0 &= \pm\frac{n\lambda}{2} & (1.148)\\ &= 0, \pm\frac{\lambda}{2}, \pm\lambda, \pm\frac{3\lambda}{2}, ... & (1.149)\end{aligned}}
$$

である。

（以下　参考程度で。）

両端が固定された長さ ℓ の弦の固有振動を考えよう。両端が固定されているので、節になる条件から

$$\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 0 \tag{1.150}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 0 \tag{1.151}$$

よって、$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \pi$ であり、

$$\cos\left(\frac{2\pi\ell}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{2\pi\ell}{\lambda} = 0 \tag{1.152}$$

$$\frac{2\pi\ell}{\lambda} = n\pi \tag{1.153}$$

よって、

$$\lambda = \frac{2\ell}{n} = 2\ell, \ell, \frac{2\ell}{3}, \frac{\ell}{2}, ... \tag{1.154}$$

となる。これを振動数で書き直すと、

$$\nu = \frac{v}{\lambda} \tag{1.155}$$

$$= \frac{n}{2\ell}v \tag{1.156}$$

$$= \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\sigma}} \tag{1.157}$$

$n = 1$ の場合を基本振動、$n = 2$ の場合を 2 倍振動、$n = 3$ の場合を 3 倍振動などという。

（群速度はまじめに考えてみよう。）

つぎに、振動数と波長がわずかに異なる場合を考えよう。

$$
\boxed{\begin{aligned} u_1 &= a\sin(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1) & (1.158)\\ u_2 &= a\sin(\omega_2 t - k_2 x + \phi_2) & (1.159)\end{aligned}}
$$

$$
\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= \boxed{2a\cos(\Delta\omega t - \Delta k x + \Delta\phi)\sin(\omega t - kx + \phi)} \end{aligned} \tag{1.160}
$$

tが両方に入っていてやな感じだけど、Δの近似を使って何が起きるかを考える。

ここで、

1.74、1.75の関係などを参考にしつつ。

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= (\omega_1 - \omega_2)/2, && (1.161)\\
\Delta k &= (k_1 - k_2)/2, && (1.162)\\
\Delta\phi &= (\phi_1 - \phi_2)/2, && (1.163)\\
\omega &= (\omega_1 + \omega_2)/2, && (1.164)\\
k &= (k_1 + k_2)/2, && (1.165)\\
\phi &= (\phi_1 + \phi_2)/2. && (1.166)
\end{aligned}$$

$\Delta\omega \ll \omega$ なので、cos の部分はゆっくりと変化し、これが徐々に変化する振幅の役割を果たす。その進む速さは

$$U_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} \tag{1.167}$$

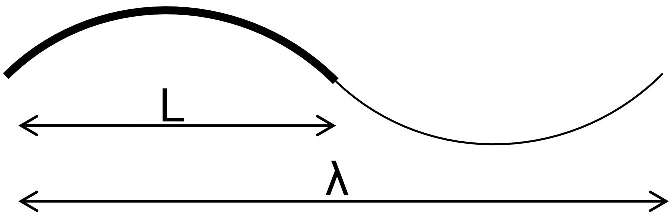
であり、これを群速度という。一方、

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{1.168}$$

を位相速度という。

<<第4講終わり>>

- ギターの弦を張る事を考えてみよう
  - 弦:　長さL=50cm　　直径d=0.5mm　材質:鉄(7.8g/cm^3)
  - 音:260Hz(大体C)　　を出す為の　張力を考える



$\lambda = 2L$

1.78式より　$\lambda\nu = v = \sqrt{T/\sigma}$
$T = \sigma(\lambda\nu)^2 = \sigma(2L\nu)^2$

$\sigma = \pi(0.25\times10^{-3})^2\times7.8\times10^{-3}$　kg/m
$L = 0.5$m
$\nu = 260$　1/s

を代入して、T=100kg　m/s^2　　程度になる。

- 振動と波動　まとめ地図

次元計算

できて欲しいこと

運動方程式　ma= -kx　(1.1)

式を立てる

抵抗力mγvを考慮

ma= -mγv-kx　(1.7)

式を立てる

減衰振動

グラフを描く

x(t)=a exp(-γt/2)sin(ωt+Φ)　(1.14)

単振動

グラフを描く

x(t)=a sin(ωt+Φ)　(1.6改)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

振動の合成

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) && (1.42) \\ x_2 &= a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) && (1.43) \\ x &= x_1 + x_2 \\ &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) && (1.44) \end{aligned}$$

ω1=ω2=ωのとき　x(t)=a sin(ωt+Φ)　(1.45)

ω1～ω2のとき

$$x = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (1.48)$$

うなりの回数 $\left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right| / \pi = |\nu_1 - \nu_2|$　(1.50)

(1.48)式を見て「うなり」を説明、(1.50)式を導出

xを固定

波動の式（正弦波の例）　(1.73)

$$u(x,t) = a\sin(\omega(t - x/v) + \phi)$$

波動方程式

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (1.82)$$

運動エネルギー
＋位置エネルギー

入射波＋反射波

波動方程式
を見たときに速度を
書ける

縦波、横波
モデル計算

波のエネルギー

$$I = v\bar{U} = \frac{1}{2} v\sigma a^2 \omega^2 \quad (1.115)$$

波の速度

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} \quad (1.108)$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

定在波

$$u = 2a\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \quad (1.143)$$

この式が「定在波」であることの説明、節間隔の計算

T,σ ρ E に具体的な数値を入れてvの計算

<<第5講>>

第2章　連続体の力学

2.1　固体と変形　（教科書68ページ〜）

質点　質量を持ち、大きさを持たない点状の粒子。

剛体　質点の集まり。質点間の距離が不変。質量分布が変化しない。

　実際の物質は原子・分子の集合体であり、分子・原子間の距離が変ることで変形する。

連続体　物質の質量が連続的に分布するものを連続体という。

- 固体
- 液体
- 気体

変形　固体に力を加えると形が変ること。

弾性　変形を元に戻そうとする性質（元の釣り合いの位置に戻ろうとする）。

2.1.1　ずれと応力

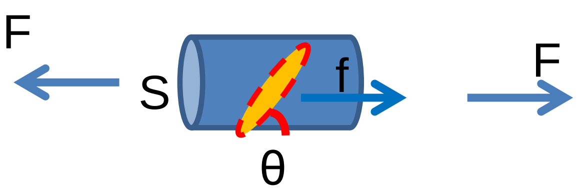
応力：連続物体内の1つの面の両側の部分が作用しあう単位面積当たりの力

　断面積 S の棒を両端から大きさ F の力で引っ張る。棒と角度 θ をなす仮想的な断面を考えると力の釣り合いから次の関係式を得る。

$$F = fS' = fS/\sin\theta \tag{2.1}$$

ここで、S' は仮想的な断面の面積で、f は単位面積当たりに働く力（応力）である。この式から応力の大きさは

$$f = \frac{F}{S}\sin\theta \tag{2.2}$$



この応力は連続体の断面の両側から作用する。また、断面に対して垂直な成分と平行な成分をそれぞれ法線応力、接線応力と呼ぶ。

$$f_n = f\sin\theta = \frac{F}{S}\sin^2\theta \tag{2.3}$$

$$f_t = f\cos\theta = \frac{F}{S}\sin\theta\cos\theta \tag{2.4}$$

応力の単位は $[\mathrm{N/m^2}]$。

引きあう法線応力：張力
押し合う法線応力：圧力

2.1.2 応力テンソル （教科書該当箇所なし。省略）

法線ベクトル $\vec{n}$ の面に働く応力 $\vec{f_n}$ は応力テンソル T と面の法線ベクトルを使って次のように書ける。

$$\vec{f_n} = T\vec{n} \tag{2.5}$$

弾性体のなかに座標系を取り、$O = (0,0,0)$, $A = (a,0,0)$, $B = (0,b,0)$, $C = (0,0,c)$ を頂点とする三角錐の運動方程式を考える。

$$\rho V\alpha = V\vec{f_V} + S\vec{f} - S_x\vec{T_x} - S_y\vec{T_y} - S_z\vec{T_z} \tag{2.6}$$

ここで、$V = \frac{1}{6}abc$ は三角錐の体積、S, S_x, S_y, S_z はそれぞれ三角錐の底面積。α は加速度、$\vec{f_V}$ は単位体積あたりに働く力（例えば重力）である。$V \to 0$ のとき $V/S \to 0$ になるので、

$$\vec{f} = \frac{S_x}{S}\vec{T_x} + \frac{S_y}{S}\vec{T_y} + \frac{S_z}{S}\vec{T_z} \tag{2.7}$$

$$= n_x\vec{T_x} + n_y\vec{T_y} + n_z\vec{T_z} \tag{2.8}$$

ここで、次の関係を用いた。

$$S_x = S\vec{n}\cdot\vec{e_1} = Sn_x \tag{2.9}$$

$$S_y = S\vec{n}\cdot\vec{e_2} = Sn_y \tag{2.10}$$

$$S_z = S\vec{n}\cdot\vec{e_3} = Sn_z \tag{2.11}$$

$$\tag{2.12}$$

よって、つぎのように書ける。

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_{nx} \\ f_{ny} \\ f_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{yx} & T_{zx} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{zy} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = T\vec{n} \tag{2.13}$$

$$\vec{T}_x = \begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \\ T_{xz} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_y = \begin{pmatrix} T_{yx} \\ T_{yy} \\ T_{yz} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}_z = \begin{pmatrix} T_{zx} \\ T_{zy} \\ T_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

基底ベクトルを法線とする面に対する応力がわかれば、任意の面に対する応力が決まる。

なお、テンソルとは何かというと、直交変換

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j \tag{2.15}$$

に対して

$$T'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik} a_{jl} T_{kl} \tag{2.16}$$

の変換性を持つ量である。この場合は2次のテンソル。1次のテンソルがベクトルである。

また、応力テンソルは対称テンソルである。

$$T_{ij} = T_{ji} \tag{2.17}$$

応力テンソルがテンソルであり、さらに対称テンソルであることの証明は略す。

2.1.3　応力歪み曲線　（教科書70ページ〜）

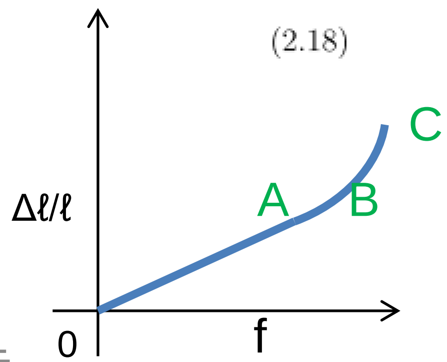
棒に力を加えて（引っ張り）、伸ばしていく。もとの長さを ℓ とし、伸びを $\Delta\ell$ とすると $\Delta\ell/\ell$ を歪みという。

- 最初、歪みは応力に比例するが、
- あるところから比例しなくなる（比例限界）A
- そしてさらに、あるところから元に戻らなくなる（弾性限界）。B
- そして、最後はちぎれてしまう（破断点）C

応力と歪みが比例限界内にあるときフックの法則が成り立つ。

$$\frac{\Delta\ell}{\ell} \propto \frac{F}{S} \tag{2.18}$$

フックの法則が成り立つ物質を弾性体という。



2.2　弾性の定数 （教科書71ページ～）

	E[Nm^{-2}]	σ
アルミニウム	7×10^{10}	0.35
ガラス	7×10^{10}	0.22
ゴム	5×10^{6}	0.5

E:ヤング率

第三講でもでてきた。

$$\boxed{\frac{F}{S} = E\frac{\Delta\ell}{\ell}} \tag{2.19}$$

σ:ポアソン比 棒を伸ばしたときの縦方向の歪みとその垂直方向の歪みの比。

$$\boxed{\sigma = -\frac{\Delta b/b}{\Delta\ell/\ell}} \tag{2.22}$$

ものすごく乱暴な言い方をすると
ヤング率：堅さ
ポアソン比：粘り

k:体積弾性率 圧力が p から $p+\Delta p$ に変化するとき、体積が v から $v+\Delta v$ に変化する。

$$\Delta p = -k\frac{\Delta v}{v} \tag{2.20}$$

通常、p は大気圧。また、$\kappa = 1/k$ を圧縮率という。

G:剛性率（ずれ弾性率）接線応力に対して、角度 $\phi \sim \Delta a/b$ 歪む。

$$\frac{F}{S} = G\phi \tag{2.21}$$

それぞれの定数の次元を考えてみよう。

これら 4 つの定数のうち、独立なものは 2 つであり、次の関係が導ける。

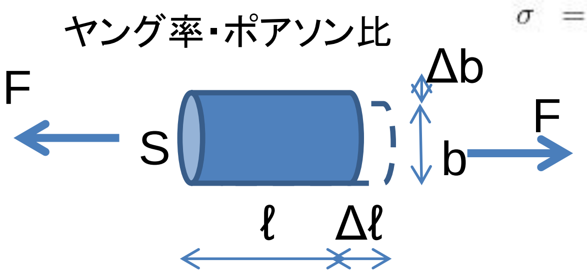
$$\boxed{k = \frac{E}{3(1-2\sigma)}} \tag{2.23}$$

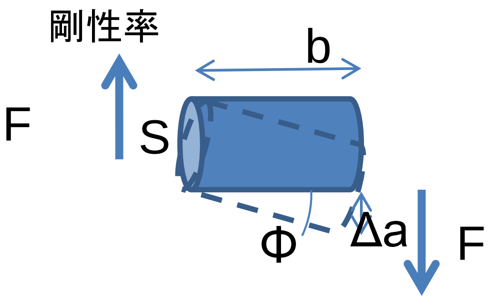
$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{2.24}$$

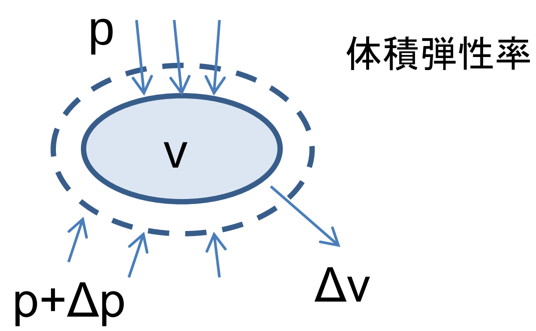
$$E = \frac{9kG}{3k+G} \tag{2.25}$$

$$\sigma = \frac{3k-2G}{2(3k+G)} \tag{2.26}$$

実験で簡単に求められるのがEとσなので、
2.23　と　2.24　が実用的。







<<第5講終わり>>

<<第6講>>

2.2.1　第１式の証明

一辺 ℓ の立方体を考え、圧力が $p \to p + \Delta p$ になったとする。

ここでのFは新たに増えた分の力

$$\frac{F}{S} = -\Delta p = E\frac{\Delta \ell}{\ell} \tag{2.27}$$

の式から、x 方向からの圧力により x 方向に $\Delta p\ell/E$ だけ縮む。しかし、y 方向、z 方向にも同じだけ縮むので、その 2σ 倍 x 方向に伸びることになる。よって、正味の長さの変化は

$$\Delta \ell = -(1-2\sigma)\frac{\Delta p \ell}{E} \tag{2.28}$$

これを体積変化率になおすと、

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(\ell+\Delta\ell)^3 - \ell^3}{\ell^3} \tag{2.29}$$

$$= 3\frac{\Delta \ell}{\ell} \tag{2.30}$$

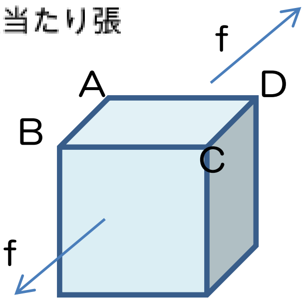
Δℓ/ℓの二次以上を無視

$$= -3\frac{(1-2\sigma)}{E}\Delta p = -\frac{\Delta p}{k} \tag{2.31}$$

よって、最初の関係式が成立。また、$k > 0$ であることから、$\sigma < 1/2$ でなくてはならない。

2.2.2　第２式の証明

１辺の長さ ℓ の立方体を考え、AD の面と BC の面で単位面積当たり張力 f で引っ張る。



- AB 方向の長さは $AB' = \ell(1 + f/E)$。
- AD 方向の長さは $AD' = \ell(1 - \sigma f/E)$。
- 2.4式 → 対角線 BD 面の接線応力は $f_t = f\sin\theta\cos\theta = f/2$。
- AC と BD のなす角を $\frac{\pi}{2} + \phi$ とすると、角 $ADB = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$。
- 剛性率の関係式は、

$$f_t = \frac{f}{2} = G \times \phi \tag{2.32}$$

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}) = \frac{AB}{AD} = \frac{1+f/E}{1-\sigma f/E} \sim 1 + (1+\sigma)f/E \tag{2.33}$$

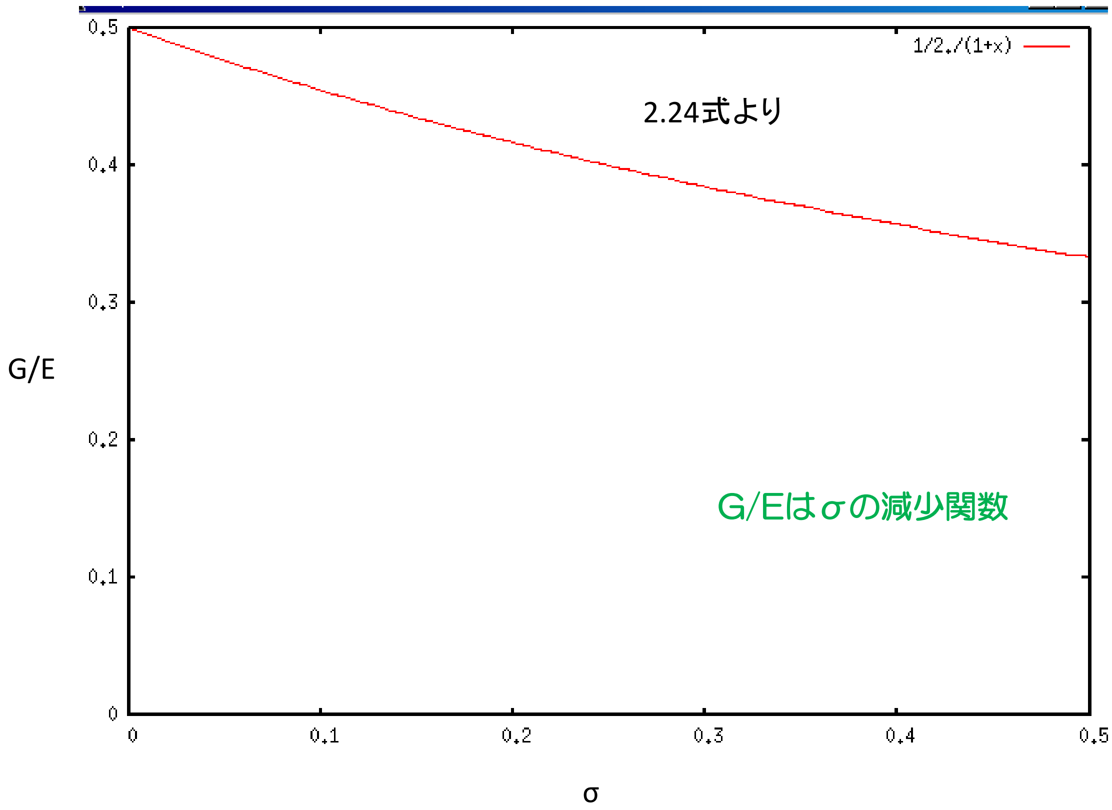
$$\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}) = \frac{1+\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan\frac{\phi}{2}} \sim 1 + 2\tan\frac{\phi}{2} \sim 1 + \phi \tag{2.34}$$

よって、

$$\phi \sim \frac{(1+\sigma)f}{E} \tag{2.35}$$

- 以上から、

$$G = \frac{f_t}{\phi} = \frac{f}{2\phi} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{2.36}$$



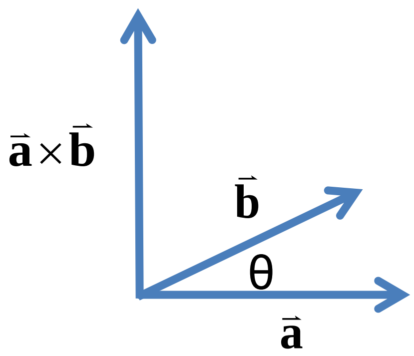
2.3.0　剛体の力学（復習）

静止している剛体では、次のつり合いの式が成り立つ。

$$\boxed{\begin{array}{ll}\sum F_i = 0 & (2.a) \\ \sum N_i = 0 & (2.b)\end{array}}$$

F_i: ベクトルとしての力

N_i: 任意の一点の周りのモーメント （$=r_i \times F_i$）

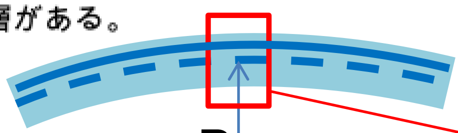


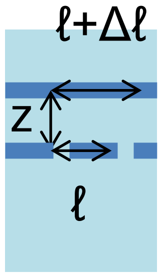
$$|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}| = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\sin\theta$$

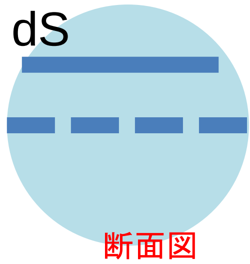
2.3 弾性変形(たわみ、ねじれ) (教科書73ページ~)

2.3.1 たわみ

ヤング率 E の一様な棒をまげる。棒が伸びる部分と縮む部分ができ、そのあいだに伸縮しない中立層がある。







- $R=$ 中立層の曲率半径
- $z=$ 中立層からの距離
- 長さ $\ell = Rd\theta$ にたいする z における伸びは $\Delta\ell = (R+z)d\theta - Rd\theta = zd\theta$
- よって、z における応力は

断面では上下逆向きの力が働いているので、回転「モーメント」が働く。

$$\boxed{f = E\frac{\Delta\ell}{\ell} = E\frac{zd\theta}{Rd\theta} = E\frac{z}{R}} \tag{2.37}$$

- 断面における曲げモーメントを次のように定義する。

応力が単位面積当たりの力なので、dSをかける。

$$\boxed{M = \int fzdS = \frac{E}{R}\int z^2 dS = \frac{E}{R}I} \tag{2.38}$$

ここで、$I = \int z^2 dS$ を断面２次モーメントという。

具体的な問題として、長方形の断面 $(a\times b)$ を持つ長さ ℓ で質量 m の棒を両端で支持する場合を考えよう。このとき、中央は水平線からどれだけ落ち込むだろうか。

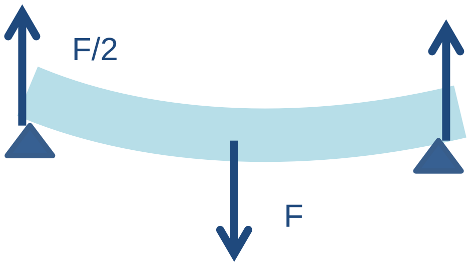
- 断面２次モーメントは

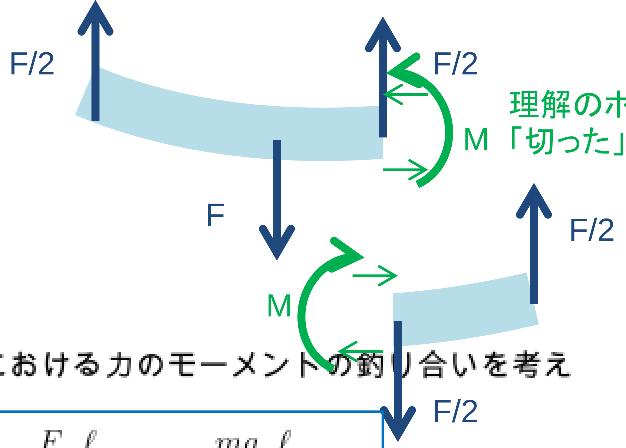
$$I = \int_{-a/2}^{a/2} z^2 bdz = \frac{1}{12}a^3 b \tag{2.39}$$

なので、

- 曲げモーメントは

$$M = \frac{E}{R}\frac{a^3 b}{12} \tag{2.40}$$





理解のポイントは本当に「切った」絵を書くこと。

- 棒の中心からの距離 x における力のモーメントの釣り合いを考えると、

$$\boxed{\frac{E}{R(x)}\frac{a^3 b}{12} = \frac{F}{2}(\frac{\ell}{2} - x) = \frac{mg}{2}(\frac{\ell}{2} - x)} \tag{2.41}$$

- よって、曲率（曲率半径の逆数）は

$$\frac{1}{R} = \frac{6mg}{Ea^3 b}(\frac{\ell}{2} - x) \tag{2.42}$$

- 曲線 $y = f(x)$ の曲率半径は、$y' = f'(x)$ が小さいとき、微分幾何学の公式から次のようになる。

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \sim y'' \tag{2.43}$$

- よって、次の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6mg}{Ea^3 b}(\frac{\ell}{2} - x) \tag{2.44}$$

- $y = 0$ at $x = \ell/2$ および $dy/dx = 0$ at $x = 0$ とすると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6mg}{Ea^3 b}(\frac{\ell}{2}x - \frac{1}{2}x^2) \tag{2.45}$$

$$y = f(x) = \frac{6mg}{Ea^3 b}(\frac{\ell}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + C) \tag{2.46}$$

$$= \frac{6mg}{Ea^3 b}(\frac{\ell}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{\ell^3}{24}) \tag{2.47}$$

- これで曲線が決まったので、$x = 0$ を代入すれば、

$$\boxed{f(x) = \frac{6mg}{Ea^3 b}(-\frac{\ell^3}{24}) = -\frac{mg\ell^3}{4Ea^3 b}} \tag{2.48}$$

ヤング率 $E = 2 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$, $a = b = 1\ \mathrm{cm}$, $\ell = 1\ \mathrm{m}$ の棒がある。

- 棒の上端を固定して下端に質量 $1\ \mathrm{kg}$ の重りを吊したときの伸びは

$$\Delta\ell = \frac{F/S}{E} \times l = \frac{9.8/(0.01)^2}{2 \times 10^{11}} \times 1 = 4.9 \times 10^{-7} m \tag{2.49}$$

- 両端を固定し、中央に質量 M の重りをぶらさげた時の降下は

$$\Delta y = \frac{mg\ell^3}{4Ea^3 b} = \frac{9.8 \times 1^3}{2 \times 10^{11} \times 4 \times (0.01)^4} = 1.2 \times 10^{-3} m \tag{2.50}$$

数学的補足

曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x, y) と、その近傍の２点 $(x+\Delta x, y + y'\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2$y")および $(x - \Delta x, y - y'\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2$y")が同一の円上にあるとする。この円の中心を (A, B) および半径を R とすると、次の連立方程式を得る。

$$
\begin{aligned}
(x-A)^2 + (y-B)^2 &= R^2 && (2.51)\\
(x+\Delta x - A)^2 + (y + y'\Delta x + \frac{1}{2}y''(\Delta x)^2 - B)^2 &= R^2 && (2.52)\\
(x-\Delta x - A)^2 + (y - y'\Delta x + \frac{1}{2}y''(\Delta x)^2 - B)^2 &= R^2 && (2.53)
\end{aligned}
$$

二式から一式をひいて Δx の２次の項を無視すると、

$$
\begin{aligned}
(x-A)\Delta x + (y-B)y'\Delta x &= 0 && (2.54)\\
x - A &= -(y-B)y' && (2.55)
\end{aligned}
$$

二式と三式の和を取り、Δx の４次の項を無視すると、

$$
\begin{aligned}
&2(x-A)^2 + 2(\Delta x)^2 \\
&+2(y-B)^2 + 2y'^2(\Delta x)^2 + 2(y-B)y''(\Delta x)^2 = 2R^2 && (2.56)\\
&1 + y'^2 + (y-B)y'' = 0 && (2.57)\\
&y - B = -\frac{1+y'^2}{y''} && (2.58)
\end{aligned}
$$

よって、

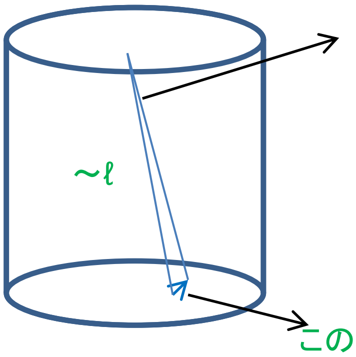
$$
x - A = -(y-B)y' = \frac{(1+y'^2)y'}{y''} \qquad (2.59)
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
R^2 &= (x-A)^2 + (y-B)^2 && (2.60)\\
&= (1+y'^2)\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2 && (2.61)\\
&= \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} && (2.62)
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad (2.63)
$$



2.3.2　ねじれ

- 半径 a, 長さ ℓ, 剛性率 G の円筒の下端に偶力を働かせて θ 回転させる。
- このとき $r \to r + dr$ の部分をとりだしてみると、

$$\phi = \frac{r\theta}{\ell} \tag{2.64}$$

なので、応力は

$$f = G\phi = \frac{Gr\theta}{\ell} \tag{2.65}$$

r〜r+drの円環部分

- この部分による力のモーメントは

$$Fr = frdS = \frac{Gr\theta}{\ell} \times r \times 2\pi r dr = \frac{2\pi G r^3 \theta}{\ell} dr \tag{2.66}$$

- これを $0 < r < a$ で積分して、応力による力のモーメントは次のようになる。

$$N = \int_0^a \frac{2\pi G r^3 \theta}{\ell} dr = \frac{\pi G a^4}{2\ell}\theta \tag{2.67}$$

この円筒に慣性能率 I の重りをつけると、ねじり振り子ができる。その運動方程式は

（1．1）式　ma= -kx　参照

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\pi G a^4}{2\ell}\theta \tag{2.68}$$

これは単振動の式であり、その角周波数を ω とすれば、

（1.2.1）式　ω=√(k/m)　参照

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G a^4}{2\ell I}} \tag{2.69}$$

ℓ、a,Gをとωとの関係を考えてみよう。

その周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell I}{\pi G a^4}} \tag{2.70}$$

<<第6講終わり>>

<<第7講>>

2.4　弾性のエネルギー

ヤング率 E, 長さ ℓ, 断面積 S の棒を $\Delta\ell$ だけ引きのばすには、どれだけの仕事が必要か？

- 長さ $\ell + x$ のときの応力は

$$\frac{F}{S} = E\frac{x}{\ell} \tag{2.71}$$

よって、$\ell \to \ell + \Delta\ell$ になるまでの仕事は

$$\int_0^{\Delta\ell} F dx = \int_0^{\Delta\ell} SE\frac{x}{\ell}dx = \frac{1}{2}\frac{SE}{\ell}(\Delta\ell)^2 \tag{2.72}$$

- これを単位体積あたりの仕事に直すと、

$$\frac{1}{2}\frac{SE}{\ell}(\Delta\ell)^2/S\ell = \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 \tag{2.73}$$

これを弾性エネルギーという。

一般に、単位体積あたりの弾性エネルギーは

$$\frac{1}{2} \times (\text{弾性率}) \times (\text{ひずみ})^2 \tag{2.74}$$

の形で書ける。

弾性率の次元が単位体積あたりのエネルギーとなっていることを確認しよう。

2.5 弾性波

2.5.1 棒を伝わる縦波 （第3講で説明済）

密度 ρ、ヤング率 E の一様な棒を伝わる縦波。もともと $(x, x+\Delta x)$ の部分が変形して $(x+u, x+\Delta x+u+\Delta u)$ の位置に移ったとする。断面における応力は

$$F/S = E\frac{\Delta u}{\Delta x} = E\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.75}$$

である。もともと $x \to x+\Delta x$ の部分の運動方程式を立てると

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_{x+\Delta x} - F_x = SE\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = SE\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x \tag{2.76}$$

すなわち次の波動方程式を得る。

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{2.77}$$

この式から、棒を伝わる縦波の速さは $\boxed{\sqrt{E/\rho}}$。

2.5.2 固体を伝わる縦波 進行方向と垂直方向の応力の比を考える

弾性体のなかに直方を考え、x 方向に縦波が進み、横方向には伸縮しないとする。このとき

ヤング率によるひずみ＋ポアソン比による歪み

$$\Delta a = \frac{f_x}{E}a - \sigma\left(\frac{f_y}{E}+\frac{f_z}{E}\right)a \tag{2.78}$$

$$\Delta b = \frac{f_y}{E}b - \sigma\left(\frac{f_z}{E}+\frac{f_x}{E}\right)b = 0 \tag{2.79}$$

$$\Delta c = \frac{f_z}{E}c - \sigma\left(\frac{f_x}{E}+\frac{f_y}{E}\right)c = 0 \tag{2.80}$$

よって、

$$f_y = \sigma(f_x+f_z) \tag{2.81}$$

$$f_z = \sigma(f_x+f_y) \tag{2.82}$$

なので、

$$f_y = f_z = \frac{\sigma}{1-\sigma}f_x \tag{2.83}$$

となり、

$$\Delta a = \frac{f_x}{E} a \left(1 - 2\sigma \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) \tag{2.84}$$

$$= \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{1-\sigma} \frac{f_x}{E} a \tag{2.85}$$

よって、実質的なヤング率は

$$E' = \frac{(1-\sigma)E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \tag{2.86}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{E}{1+\sigma} + \frac{1}{3}\frac{E}{1-2\sigma} \tag{2.87}$$

$$= k + \frac{4}{3}G \tag{2.88}$$

ここで、$k = E/3(1-2\sigma)$ と $G = E/2(1+\sigma)$ の関係式を用いた。以上から、縦波の速さは

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{k + \frac{4}{3}G}{\rho}}} \tag{2.89}$$

となる。

2.5.3 固体を伝わる横波

$x \to x + \Delta x$ で横方向の変位が $u \to \Delta u$ になったとすると、弾性率の式から接線応力は

$$F/S = G\phi = G\frac{\Delta u}{\Delta x} = G\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.90}$$

固体の密度を ρ として、断面積 S で $x \to x + \Delta x$ の部分の運動方程式を立てると

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_{x+\Delta x} - F_x = SG\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] = SG\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x \tag{2.91}$$

すなわち次の波動方程式を得る。

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{2.92}$$

この式から、固体を伝わる横波の速さは $\boxed{\sqrt{G/\rho}}$。

縦波の速さ $(\sqrt{(k + \frac{4}{3}G)/\rho})$ は横波の速さ $(\sqrt{G/\rho})$ より大きい。

<<第7講終わり>>

• 弾性体　まとめ地図

できて欲しいこと

E:ヤング率

日本語⇔数式の変換
それぞれの次元の確認
具体的な数値を入れた計算

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta \ell}{\ell} \qquad (2.19)$$

σ:ポアソン比 棒を伸ばしたときの縦方向の歪みとその垂直方向の歪みの比。

$$\sigma = -\frac{\Delta b/b}{\Delta \ell/\ell} \qquad (2.22)$$

k:体積弾性率 圧力が p から $p+\Delta p$ に変化するとき、体積が v から $v+\Delta v$ に変化する。

日本語⇔数式の変換
それぞれの次元の確認

$$\Delta p = -k\frac{\Delta v}{v} \qquad (2.20)$$

通常、p は大気圧。また、$\kappa = 1/k$ を圧縮率という。

G:剛性率（ずれ弾性率）接線応力に対して、角度 $\phi \sim \Delta a/b$ 歪む。

$$\frac{F}{S} = G\phi \qquad (2.21)$$

2.19、2.22、2.20
⇒2.23　の導出

$$k = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad (2.23)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \qquad (2.24)$$

• 断面における曲げモーメントを次のように定義する。

$$M = \int fz dS = \frac{E}{R}\int z^2 dS = \frac{E}{R}I \qquad (2.38)$$

ここで、$I = \int z^2 dS$ を断面２次モーメントという。

断面の形を与えられた
時のIの計算
Rはどうでもよい。

式はどうでもよい。
釣り合いの絵がかけること。
応力・圧力・張力の概念

$$f(x) = \frac{6mg}{Ea^3b}\left(-\frac{\ell^3}{24}\right) = -\frac{mg\ell^3}{4Ea^3b} \qquad (2.48)$$

この式を与えられた時に、具体的
に数値を入れた計算

固体中の縦波、横波の導出、(2.23)(2.24)を与えられた時に下記大小を示す

縦波の速さ $\left(\sqrt{(k+\frac{4}{3}G)/\rho}\right)$ ＞ 横波の速さ $\left(\sqrt{G/\rho}\right)$

<<第8講>>

2.6 流体 （教科書80ページ～）

またまた
言葉の定義から。

- 流体：気体および液体。容器の形に従う。これも連続体である。
- 静止した流体では面に垂直な圧力だけが働く。すなわち、「法線応力」であり、接線応力は働かない。
- 体積が変るものを圧縮性流体 (気体)、体積が変らない流体を非圧縮性流体 (液体) という。
- 流体が流れているとき、並んで流れる 2 つの層に速度差があると接線応力が働く。これを粘性といい、粘性のあるものを粘性流体という。流体が x 方向に流れていて、y 方向に速度勾配 $(\partial v/\partial y)$ があるとき、接線応力 f_x は次のように表せる。

2.8 章で定義からやる

$$f_x = \eta \frac{dv}{dy} \tag{2.93}$$

粘性のない流体を完全流体という (実際にはほとんど存在しないが、数学的に取り扱いやすい)。

2.6.1 静止流体

直感的には当たり
前のこと。

- 静止流体の任意の面で、面に垂直な圧力が働き、
- ある点における圧力はどの方向の面に対しても等しい。
- 以前弾性体の時に考えたのと同様の三角錐を流体のなかにとり、力の釣り合いを考えると、面の法線ベクトルを $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ として、

$$\begin{aligned} p_x S_x &= pSn_x = pS_x & (2.94) \\ p_y S_y &= pSn_y = pS_y & (2.95) \\ p_z S_z &= pSn_z + \rho V g = pS_z + \rho V g & (2.96) \end{aligned}$$

三角錐を小さくすれば体積に比例する項は無視できるので、$p_x = p_y = p_z = p$。

- 完全流体の場合も接線応力が働かないので、ある点における圧力はどの方向の面に対しても等しい。

一様な重力の元での圧力 流体の密度を ρ とし 底 面積 S の直方体を考え、圧力を $p(z)$ とすると、z 方向の力の釣り合いから

$$\begin{aligned} p(z_1)S &= S\,p(z_2) + \rho S(z_2 - z_1)g & (2.97) \\ p(z_1) + \rho g z_1 &= p(z_2) + \rho g z_2 = \text{const.} & (2.98) \end{aligned}$$

$p(0) = p_0$ とすると

$$\boxed{p(z) = p_0 - \rho g z} \qquad (2.99)$$

パスカルの原理 上の応用。密閉した容器中の静止流体の一点で圧力を増加させるとすべての点で圧力がそれだけ増加する。水鉄砲。ある一点における圧力が $p(z_0) = p_0 \to p_0' = p_0 + \Delta p$ に変化すれば、任意の点の圧力は

$$p(z) = p_0 - \rho g(z - z_0) \qquad (2.100)$$

であることから

$$\begin{aligned} p'(z) &= p_0' - \rho g(z - z_0) \\ &= (p_0 + \Delta p) - \rho g(z - z_0) \\ &= (p_0 - \rho g(z - z_0)) + \Delta p \\ &= p(z) + \Delta p & (2.101) \end{aligned}$$

アルキメデスの原理 物体の全部又は一部が液中にあるとき液面以下にある部分の体積に等しい体積の重量に等しい浮力が働く。

気体の圧力の高度による変化 地上の空気が理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ に従い、温度 T が一定の場合を考えよう。このとき、圧力 p と密度 $\rho = M/V$ の間の関係は $\boxed{p/\rho = p_0/\rho_0 = \text{一定}}$ となる。Δz が小さいとき、

$$\begin{aligned} p(z + \Delta z) &= p(z) - \rho(z) g \Delta z & (2.102) \\ &= p(z) - \frac{\rho_0 g}{p_0} p(z) \Delta z & (2.103) \\ \frac{dp}{dz} &= -\frac{\rho_0 g}{p_0} p(z) & (2.104) \\ \boxed{p(z) = p_0 \exp(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z)} && (2.105) \end{aligned}$$

よって、圧力は高度 z にたいして指数関数で減少する。ただし、実際の大気では高度による温度変化を考えなくてはならないので、こうはならない。

2.7 完全流体

定常流 流体が運動していて、空間の各点で流速（のベクトル）が時間的に変化しないとき、定常流という。

流線と流管 各点の速度ベクトルが接線となる曲線を流線という。また、ある閉曲線の各点から流線をひくと、一つの管ができ、これを流管という。定常流では流線や流管は変化しない。

連続の式 流体の密度を ρ、ある流管の断面を S、流速を v とすると、次の式が成り立つ。

$$\boxed{\rho S v = \mathrm{const.}} \tag{2.106}$$

これは流体の質量保存を表している。

次元を考えると何が一定になるかの感覚がつかめる。

ベルヌイの定理 密度 ρ が一定の完全流体では、細い流管について、次の定理が成り立つ。

$$\boxed{\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \mathrm{const.}} \tag{2.107}$$

流管の断面がする仕事と運動エネルギー、位置エネルギーの変化を考えれば良い。$A \to B$ に流れるとして、

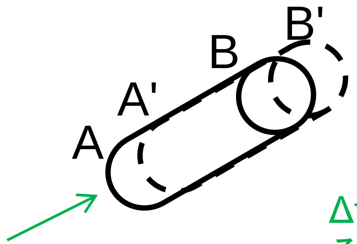
$$p_A S_A v_A \Delta t - p_B S_B v_B \Delta t = \frac{1}{2}\rho_B V_B v_B^2 + \overset{V_B}{\rho_B} g z_B - \frac{1}{2}\rho_A V_A v_A^2 - \rho_A g z_A V_A \tag{2.108}$$

ここで ρ が一定なので、$V_A = S_A v_A \Delta t = V_B = S_B v_B \Delta t$ である。よって、

$$\frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B = \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A \tag{2.109}$$

すなわち、

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = const. \tag{2.110}$$

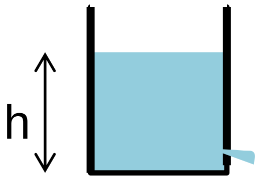


Δtの間にAB（実線）のものがA'B'（破線）に移動した、と考える。
圧力のした仕事はA面で2.108左辺第一項
B面で2.108左辺第二項　となる。

<<第8講終わり>>

左辺：矢印の向きに圧力のした仕事。
右辺：増えた分（B~B'間）の持つ運動＋位置エネルギー　－
減った分（A~A'間）の持つ

<<第10講>>



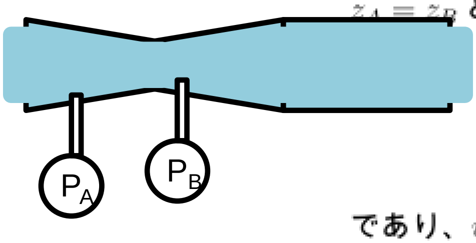
2.7.1　ベルヌイの定理の応用

トリチェリの定理

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \tag{2.111}$$

$$v = \sqrt{2gh} \tag{2.112}$$

ベンチュリ管　断面積の違う断面 A, B で圧力差を測ると、流量が求まる。



$z_A = z_B$ として、

既知量：S_A, S_B, P_A, P_B

$$S_A v_A = S_B v_B = Q \tag{2.113}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B \tag{2.114}$$

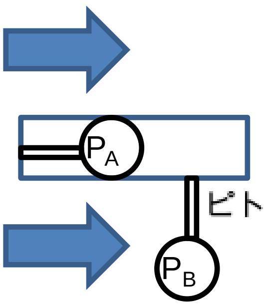
ベルヌイの定理から。

であり、$v_A = Q/S_A,\ v_B = Q/S_B$ を代入して

$$\frac{1}{2}\rho\left\{\left(\frac{Q}{S_B}\right)^2 - \left(\frac{Q}{S_A}\right)^2\right\} = p_A - p_B \tag{2.115}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \Big/ \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)} \tag{2.116}$$

$$= \boxed{S_A S_B \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}}} \tag{2.117}$$



ピトー管　$v_A = 0$ となる淀み点があると、

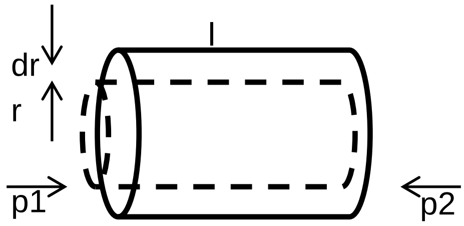
流れに垂直に圧力を測定すると、「風圧」を感じるこれから風量を測定可能。

$$p_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \tag{2.118}$$

から、流速 v_B を求められる。

$$v_B = \sqrt{2(p_A - p_B)/\rho} \tag{2.119}$$

揚力　飛行機の翼の上面の流速が密になると、流速 v は大きくなる。$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = const$ であるから、圧力 p は上面のほうが小さくなる。よって、全体として上向きの揚力が生じる。



2.8　粘性流体

流体は必ず粘性を持つ。接線応力が流体の速度勾配に比例し、

$$f = \eta \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.120}$$

となる。η を粘性率といい、その単位は $[\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}]$。粘性流体の従う方程式をナビエストークス (Navie-Stokes) の方程式という。

ハーゲンポアズイユの法則

半径 a、長さ ℓ の細い円管を粘性率 η の流体が静かに定常的に流れる。両端での圧力を $p_1, p_2 (p_1 > p_2)$ とすると、流速を中心からの距離 r の関数として求められる。　更には流量も決まる。

流速を $v = v(r)$ とする。粘性により $v(a) = 0$ である。$r \sim r + dr$ の円筒部分を考えると、接線応力と力は次のようになる

$$\begin{aligned}
f &= -\eta \frac{dv}{dr} && (2.121)\\
F &= 2\pi r \ell f = -2\pi \eta \ell r \frac{dv}{dr} && (2.122)\\
dF &= F(r+dr) - F(r) && (2.123)\\
&= \frac{dF}{dr} dr && (2.124)\\
&= -2\pi \eta l \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr} \right) dr && (2.125)
\end{aligned}$$

rで働く力の積分値

r〜drで働く力の積分値

両端の圧力との釣り合いを考えて、

$$\begin{aligned}
2\pi r dr p_1 &= 2\pi r dr p_2 - 2\pi \eta \ell \frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr} \right) dr && (2.126)\\
\frac{d}{dr}\left(r \frac{dv}{dr} \right) &= -\frac{p_1 - p_2}{\eta \ell} r && (2.127)\\
r \frac{dv}{dr} &= -\frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} r^2 + C && (2.128)
\end{aligned}$$

積分

$r = 0$ を代入して $C = 0$。よって、

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dr} &= -\frac{p_1 - p_2}{2\eta \ell} r && (2.129)\\
v &= -\frac{p_1 - p_2}{4\eta \ell} r^2 + D && (2.130)
\end{aligned}$$

境界条件 $v(a)=0$ から、

$$\boxed{v(r)=\frac{p_1-p_2}{4\eta\ell}(a^2-r^2)} \tag{2.131}$$

これを積分することで流量が求まる。

物質のη [Pa･s]
空気 2×10^-5
水 1×10^-3
グリセリン 1.5

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a 2\pi r v(r)dr \\ &= \int_0^a 2\pi r\frac{p_1-p_2}{4\eta\ell}(a^2-r^2)dr \\ &= \boxed{\frac{\pi a^4}{8\eta\ell}(p_1-p_2)} \end{aligned} \tag{2.132}$$

流体の抵抗

流体のなかにある半径 a の球は流速 v が小さいとき流体から

2.133式をmgとつりあわせることで、雨の終端速度を計算可能

$$\boxed{F=6\pi\eta a v} \tag{2.133}$$

の力を受ける。完全流体の場合は力を受けない。このことから、水や空気も粘性を持つことがわかる。

流速 v が大きくなると物体の後方に渦ができる。このときは流体の圧力によって力（圧力抵抗）が生じ、その大きさは

$$\boxed{D=C_D\rho v^2 S} \tag{2.134}$$

S は最大断面積。C_D は無次元数で抵抗係数と呼ばれ、物体の形と次に述べるレイノルズ数で決まる。

レイノルズ数と相似法則

レイノルズ数は無次元で、ℓ を流れを特徴づける長さとして

$$R=\frac{\rho v\ell}{\eta} \tag{2.135}$$

と定義される。$\rho v\ell$ の次元は $(ML^{-3})(LT^{-1})(L)=ML^{-1}T^{-1}$。$\eta$ の次元は $f/(dv/dy)$ の次元だから、$(MLT^{-2})(L^{-2})/(LT^{-1}/L)=ML^{-1}T^{-1}$ なので、確に R は無次元の量である。。

きれいな流線を持つ流れを層流、入り乱れた流れを乱流という。レイノルズ数が小さい値から大きい値に変化させると、あるところで層流から乱流に切り替わる。

レイノルズ数が等しい流れは相似になる：レイノルズの相似法則。

<<第10講終わり>>

• 流体　まとめ地図

できて欲しいこと

連続の式

いたるところで使う。
この式は覚えておこう。

$$\rho S v = \text{const.} \tag{2.106}$$

ベルヌーイの定理

日本語⇒絵を書く⇒運動方程式
それぞれの次元の確認
式を暗記する必要はなし

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z + p = \text{const.} \tag{2.107}$$

トリチェリの定理

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \tag{2.111}$$

$$v = \sqrt{2gh} \tag{2.112}$$

ベンチュリ管

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho} \Big/ \left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)} \tag{2.116}$$

$$= S_A S_B \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho(S_A^2 - S_B^2)}} \tag{2.117}$$

ベルヌーイの定理の応用3部作
日本語⇒絵を書く
定理からの導出
具体的な数値を代入

ピトー管

$$v_B = \sqrt{2(p_A - p_B)/\rho} \tag{2.119}$$

粘性の式

$$f_x = \eta \frac{dv}{dy} \tag{2.93}$$

ハーゲンポアズイユの法則

日本語⇒絵を書く
運動方程式を立てる
具体的な数値を代入

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a 2\pi r v(r) dr \\ &= \int_0^a 2\pi r \frac{p_1 - p_2}{4\eta\ell}(a^2 - r^2) dr \\ &= \frac{\pi a^4}{8\eta\ell}(p_1 - p_2) \end{aligned} \tag{2.132}$$

覚える必要はない

流体の抵抗

$$F = 6\pi\eta a v \tag{2.133}$$

圧力抵抗

$$D = C_D \rho v^2 S \tag{2.134}$$

<<第11講>>

第3章　熱力学

3.1　ボイル・シャルルの法則と状態方程式

経験的な温度とは、1 気圧 ($1.01325\ \times 10^5$ Pa) で水の融点（氷点）を 0°C、水の沸点を 100°C と決めた。

ボイルの法則 温度が一定の時、気体の圧力を P、体積を V とすると

$$PV = \mathrm{const.} \tag{3.1}$$

シャルルの法則 圧力が一定の時、気体の体積は絶対温度 T $(= t + 273.15)$ に比例する。

$$\frac{V}{T} = \mathrm{const.} \tag{3.2}$$

ボイルシャルルの法則 上の二つの法則を組み合わせて、

今日の講義を聞くと、「温度=分子の運動」 という概念がわかる。はず。

$$\frac{PV}{T} = \mathrm{const.} \tag{3.3}$$

ボイルシャルルの関係が厳密に成立する気体を理想気体という。1 モルの理想気体、n モルの理想気体の方程式はそれぞれ

$$PV = RT \tag{3.4}$$

化学で散々出てきた式

$$\boxed{PV = nRT} \tag{3.5}$$

Rの次元を考えてみよう。下の単位と合うか？

この比例係数 R を気体定数という。その値は 1 気圧、摂氏 0 度、１モルの気体から計算して

$$R = \frac{PV}{T} = \frac{1.013 \times 10^5 \times 22.4 \times 10^{-3}}{273.15} = 8.31\mathrm{J/mol \cdot K} \tag{3.6}$$

また、気体定数をアボガドロ数 ($N_A = 6.02 \times 10^{23}$) で割ったものをボルツマン定数という。

kの次元はケルビンが残る。
kTの次元がエネルギーとなる。

$$\boxed{k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23} \mathrm{J \cdot K^{-1}}} \tag{3.7}$$

ボルツマン定数を使って、理想気体の状態方程式を次のように書くこともできる。

$$\boxed{PV = NkT} \tag{3.8}$$

$$P = N_0 kT \tag{3.9}$$

ここで N は気体の分子数。$N_0 = N/V$ は単位体積あたりの気体分子数。

実在気体の状態方程式はつぎのように書ける。

$$\boxed{\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT} \tag{3.10}$$

これをファンデルワールス方程式という。

$V' = V - b$：これは、気体分子が体積を持つことによる効果。

$P' = P + a/V^2$：これは分子間力による効果。

3.2 気体の分子運動論

簡単のため、一辺の長さ L の立方体の箱に閉じ込められた気体の運動を考える。ある気体分子の速度ベクトルを

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \tag{3.11}$$

とする。x 軸に直交する壁に衝突する周期 T は

$$\boxed{T = \frac{2L}{v_x}} \tag{3.12}$$

気体分子が壁に衝突すると、その運動量変化は

$$\boxed{\Delta p = (-mv_x) - mv_x = -2mv_x} \tag{3.13}$$

よって、気体分子が壁から単位時間に受ける力積は、

$$f_x^{particle} \times 1 = \frac{\Delta p}{T} = \frac{-2mv_x}{2L/v_x} = -\frac{mv_x^2}{L} \tag{3.14}$$

となる。その反作用として、壁はひとつの気体分子から次の力を受ける。

$$f_x^{wall} = -f_x^{particle} = \frac{mv_x^2}{L} \tag{3.15}$$

N 個の気体分子があれば、その合力は

$$F_x = \sum_{i=1,N} \frac{mv_{x,i}^2}{L} = \frac{m}{L} \sum_{i=1,N} v_{x,i}^2 \tag{3.16}$$

ここで速度の自乗の平均値を考える。平均を $<>$ で表すことにする。

$$\boxed{< v_x^2 >= \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} v_{x,i}^2} \tag{3.17}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{3.18}$$

なので、v_x, v_y, v_z の対称性から、

$$< v_x^2 >=< v_y^2 >=< v_z^2 >= \frac{1}{3} < v^2 > \tag{3.19}$$

よって、壁が気体から受ける力は

$$F = F_x = F_y = F_z = \frac{Nm < v^2 >}{3L} \tag{3.20}$$

圧力にすると、

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{Nm < v^2 >}{3L^3} = \frac{Nm < v^2 >}{3V} \tag{3.21}$$

よって、

$$\boxed{PV = \frac{1}{3} Nm < v^2 >= \frac{2}{3} N \times < \frac{1}{2} mv^2 >} \tag{3.22}$$

ここで、$\frac{1}{2}mv^2$ は気体分子の運動エネルギーである。$N = nN_A$ として、状態方程式と比較する。

$$\boxed{PV = n\frac{2}{3}N_A < \frac{1}{2}mv^2 >= nRT} \tag{3.23}$$

よって、

ここの比較が重要。

$$T = \frac{2}{3}\frac{N_A}{R} < \frac{1}{2}mv^2 > \tag{3.24}$$

$$\boxed{< \frac{1}{2}mv^2 > = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{3}{2}kT} \tag{3.25}$$

すなわち、**気体の温度 T は気体分子の平均運動エネルギーに比例する。** ただし、ここまでの議論で気体分子同士の相互作用は無視している(理想気体)。

「気体分子運動論」の要となる概念

気体分子の速度は一定ではなく、分布を持っている。$f = f(v_x, v_y, v_z)$ を速度分布関数 (確率密度関数) とすると、

$$dN = Nf(v_x, v_y, v_x)dv_x dv_y dv_z \tag{3.26}$$

理想気体の速度分布関数は、Maxwell により求められた。

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp(-\frac{1}{2}mv^2/kT) \tag{3.27}$$

これを Maxwell の速度分布関数とよび (Maxwell の速度分布則)、速度ベクトルの大きさだけの関数である。この分布関数を使うと、

体積の積分をdxdydzから球殻に変えた

$$dN = Nf(v)4\pi v^2 dv \tag{3.28}$$

と書き $(f(v_x, v_y, v_z) = f(v),\ dv_x dv_y dv_z = 4\pi v^2 dv)$、速度の自乗の平均値を求めると、

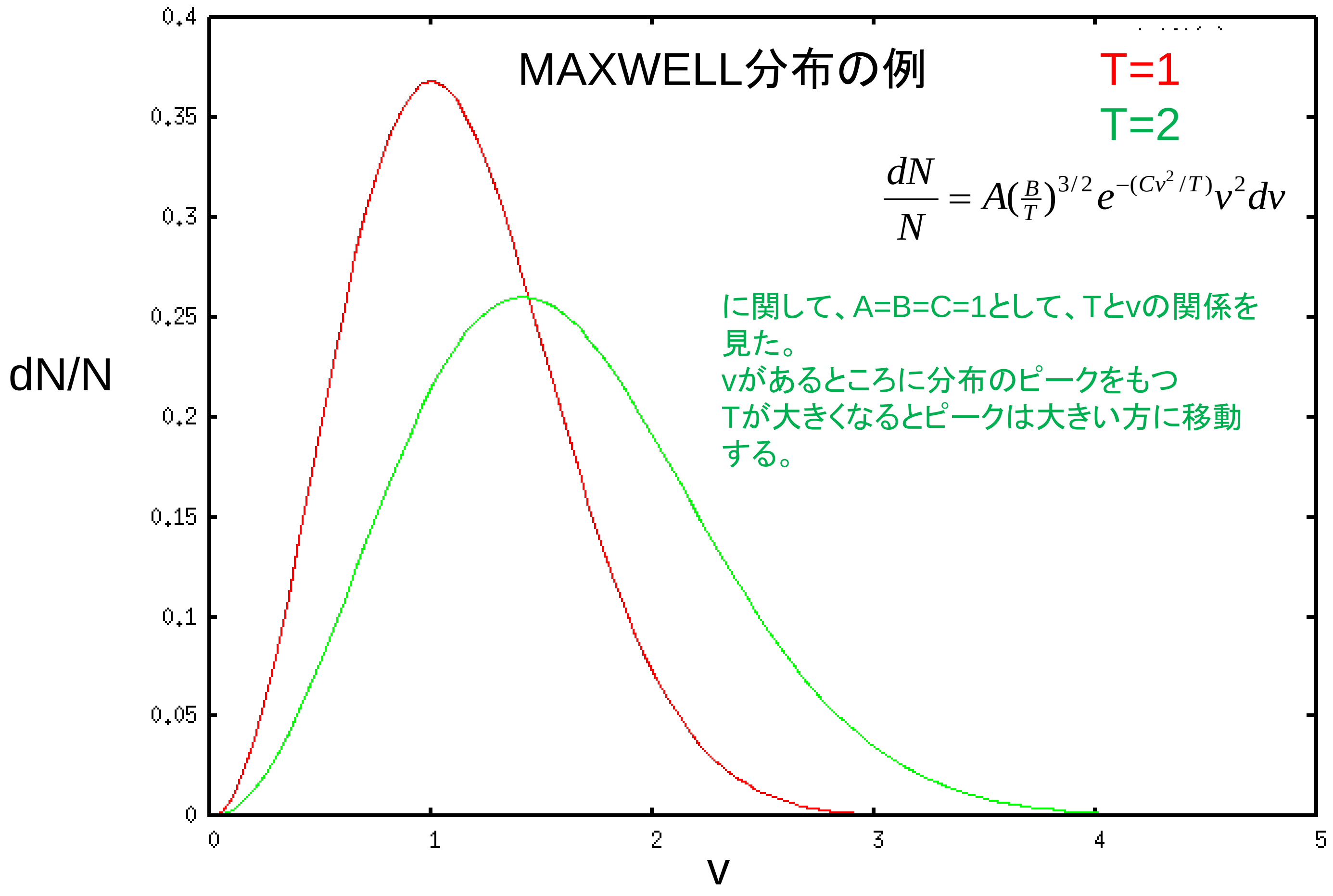
$$\begin{aligned} < v^2 > &= \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2 dN \quad \text{3.25と一致。} & (3.29) \\ &= 4\pi \int_0^\infty f(v)v^4 dv = \frac{3kT}{m} & (3.30) \end{aligned}$$

となり、理想気体の運動エネルギーと温度の関係を再現する。

(注) 上の式の計算を行うには、部分積分を繰り返しおこない、最後に誤差関数の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2)dx = \sqrt{2\pi} \tag{3.31}$$

を利用すればよい。



<<第12講>>

3.3　熱力学第１法則

Q, U, Wの定義をしっかり把握して進もう。

物体に仕事 W と熱量 Q が加わり、内部エネルギーが U_1 から U_2 に変化したとすると、

$$\boxed{\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q} \quad \text{熱力学第一法則} \tag{3.32}$$

仕事と熱量の和は途中の経過によらず始状態と終状態で決まる。

- 熱力学第１法則は力学的エネルギー保存則の拡張と見ることができる。
- 物体の状態だけで決まる量を状態量という。例：
  - 内部エネルギーは状態量。
  - 圧力、温度、体積は状態量。
  - 仕事や熱量は状態量ではない。

以下、3.32をpやVを用いて表す。

・準静的課程：温度、体積、圧力などの変化を熱平衡を保ちながらゆっくりと行う課程

- 熱力学第１法則の微分形：

微小な変化の時に成り立つ。

$$\boxed{dU = d'Q + d'W} \tag{3.33}$$

dU を完全微分という。$d'Q$, $d'W$ のそれぞれは完全微分ではない。
dを状態量の微小変化　d'を状態量でない量の微小変化とする。

ここで圧力のする仕事を考えてみる。P, V, T は状態量であり、状態方程式

$$f(P, V, T) = 0 \tag{3.34}$$

で関係付けられている。よって、２つの状態量が決まれば残り一つの状態量が決まる。例えば

$$T = T(P, V) \tag{3.35}$$

$P - V$ 平面上の点 $Z = (V, P)$ が物体の状態を示す。その状態が $Z_1 = (V_1, P_1) \to Z_2 = (V_2, P_2)$ にゆっくり変化するとき、その課程を「準静的過程」という。

容器に閉じ込められた気体に対して圧力がする仕事（気体に加えられる仕事）は

体積減少時：圧力のする仕事は正

$$\boxed{\Delta W = F\Delta x = PA\Delta x = -P\Delta V} \tag{3.36}$$

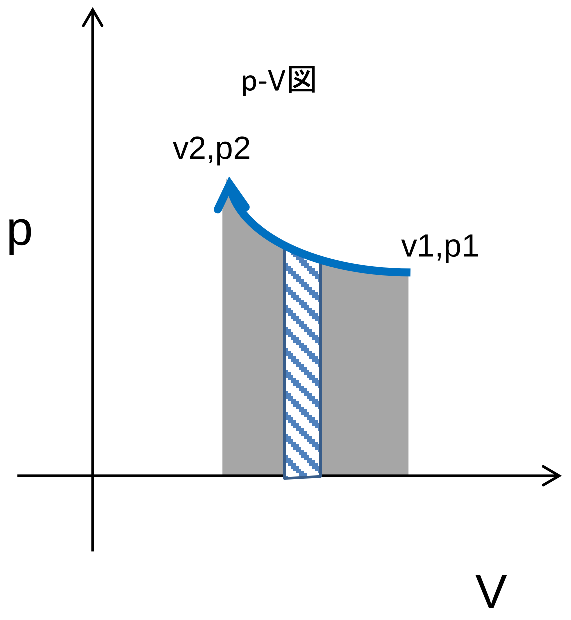
ここで、$\Delta V = -A\Delta x$ の関係を用いた。この関係式は、気体が膨張するときも、収縮するときも正しい式である。これを微分形で書いて

$$d'W = -PdV \tag{3.37}$$

よって、

ひとまず目的達成。

$$\boxed{dU = d'Q + d'W = d'Q - PdV} \tag{3.38}$$



v1,p1からv2,p2への過程を考える。
斜線部がdV間に圧力のする仕事（3.37）。
過程での仕事の和は

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV$$

とかける。

積分値は経路によるので、仕事は状態量ではない。

熱容量C：ある物体の温度を1K上げるのに必要な熱量（エネルギー）。
比熱c：単位量（質量やモル）あたりの熱容量。
C=mc　C=dQ/dT

以下、気体に関して
・定積比熱cv：体積を一定にした時の比熱。
・低圧比熱cp：圧力を一定にした時の比熱。
一般にcp > cvで　　cp/cv=γ　を気体の比熱比という

$U = U(T, V)$ とすれば、

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.39}$$

変分の概念

と書けるので、

$$\begin{aligned} d'Q &= dU + PdV && (3.40) \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV && (3.41) \\ &= \boxed{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left\{P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right\} dV} && (3.42) \end{aligned}$$

3.38の移項

等積比熱

この式で $dV = 0$ (体積変化無し) のときは

3.42の右辺第二項=0

$$c_V = \left(\frac{d'Q}{dT}\right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{3.43}$$

c_V を等積比熱という。c_V を使うと、つぎのように書ける。

$$\boxed{d'Q = c_V dT + \left\{P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right\} dV} \tag{3.44}$$

等圧比熱

圧力一定の場合の比熱を等圧比熱という。

$$\boxed{c_P = \frac{d'Q}{dT} = c_V + \left\{P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right\} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} \tag{3.45}$$

3.41より

1モルの 理想気体の場合、内部エネルギー U は温度 T だけの関数であることと、状態方程式 $(PV = RT)$ から、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T &= 0 && (3.46) \\ \frac{\partial V}{\partial T} &= \frac{R}{P} && (3.47) \end{aligned}$$

となるので、

$$\boxed{c_P = c_V + R} \tag{3.48}$$

の関係がある (モル比熱)。

<<第12講終わり>>

<<第13講>>

等温過程

温度 (T) が一定。温度 T の熱浴に接触させながら膨張、圧縮を行う。理想気体では、

$$PV = const. \qquad (3.49)$$

$$P \propto V^{-1} \qquad (3.50)$$

断熱過程

外界と熱のやりとりなしに膨張、圧縮を行う。このとき、$\gamma = c_P/c_V$ として、理想気体では次の関係がある。

$$\boxed{PV^{\gamma} = const. \qquad (3.51)}$$

以下はその説明。$d'Q = 0$ なので、$dU = c_V dT = d'W = -PdV$。よって、

$$dT = -\frac{P}{c_V}dV \qquad (3.52)$$

（3.38、3.43より）

また、$PV = RT$ から

$$d(PV) = PdV + VdP = RdT = -\frac{RP}{c_V}dV \qquad (3.53)$$

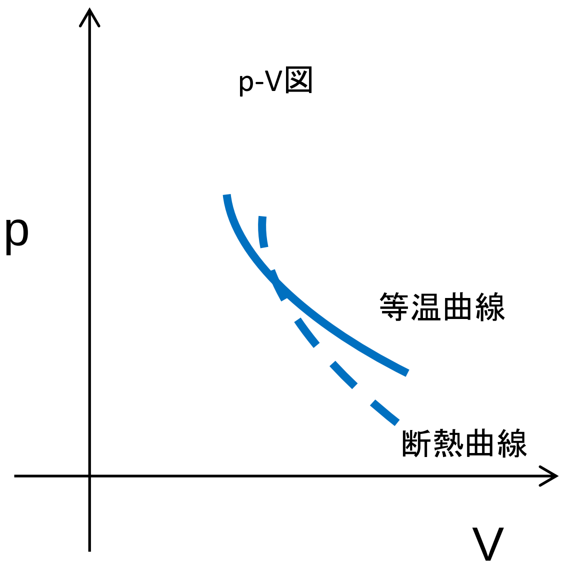
積の微分

これを変形して

$$\begin{aligned} \frac{c_V + R}{c_V}\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} &= 0 && (3.54)\\ \gamma\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} &= 0 && (3.55)\\ \gamma \log V + \log P &= const. && (3.56)\\ PV^{\gamma} &= const. && (3.57) \end{aligned}$$

積分して

ここで $\gamma = (c_V + R)/c_V > 1$ である。



一般に断熱過程の方が傾きが急になる。3.49と3.51を$p=V^{\alpha}$の形にして、微分するとわかる。

カルノーサイクル

次ページのp-V図参照

等温過程と断熱過程を組み合わせてサイクル $A \to B \to C \to D \to A$ を作る。

1モルの気体と熱源$T_1 T_2$($T1>T2$)を考える。この時、気体のエネルギー効率(=気体がした仕事/気体に与えた熱エネルギー) を計算する。

$A \to B$ (等温過程)

Q:気体に与えた熱量
W:気体に与えた仕事
U:気体の内部エネルギー

$$
\begin{aligned}
\Delta U &= Q_1 + W_1 = 0 && (3.58)\\
W_1 &= -\int_{V_A}^{V_B} P dV \quad \text{3,37などから} && (3.59)\\
&= -\int_{V_A}^{V_B} \frac{RT_1}{V} dV = -RT_1 \log V_B/V_A && (3.60)\\
&\boxed{Q_1 = -W_1 = RT_1 \log V_B/V_A} && (3.61)
\end{aligned}
$$

$B \to C$ (断熱過程) 断熱過程なので $d'Q = 0$。$p = aV^{-\gamma}$ とかけて、

$$
\begin{aligned}
W_2 &= -\int_{V_B}^{V_C} P dV && (3.62)\\
&= -\int_{V_B}^{V_C} aV^{-\gamma} dV && (3.63)\\
&= -\frac{a}{1-\gamma}(V_C^{1-\gamma} - V_B^{1-\gamma}) && (3.64)\\
&= -\frac{1}{\gamma-1}(P_B V_B - P_C V_C) && (3.65)\\
&\boxed{= -\frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2)} && (3.66)
\end{aligned}
$$

最後に、$P_B V_B = RT_1$、$P_C V_C = RT_2$ の関係を用いた。

$C \to D$ (等温過程)

$$
\begin{aligned}
W_3 &= -RT_2 \log V_D/V_C = RT_2 \log V_B/V_A && (3.67)\\
&\boxed{Q_2 = -W_3 = -RT_2 \log V_B/V_A} && (3.68)
\end{aligned}
$$

ここで、断熱過程で $TV^{\gamma-1} = const.$ であることから、$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$ および $T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$ であるので、$V_B/V_A = V_C/V_D$ となることを用いた。

$D \to A$ (断熱過程)

$$
\boxed{W_4 = \frac{R}{\gamma-1}(T_1 - T_2)} \qquad (3.69)
$$

以上から、次の関係を得る。

$$
\begin{aligned}
\frac{|Q_2|}{Q_1} &= \frac{W_3}{|W_1|} = \frac{T_2}{T_1} && (3.70)\\
W &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = -(Q_1 + Q_2) && (3.71)\\
&= -R(T_1 - T_2)\log V_B/V_A && (3.72)
\end{aligned}
$$

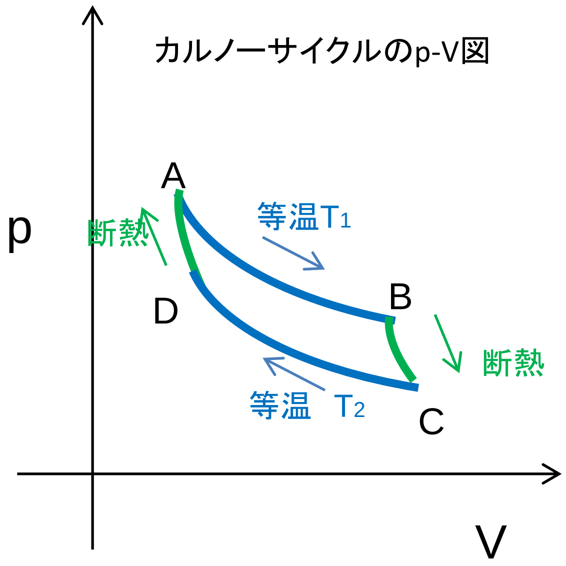
カルノーサイクルを熱機関と考えるとその効率は

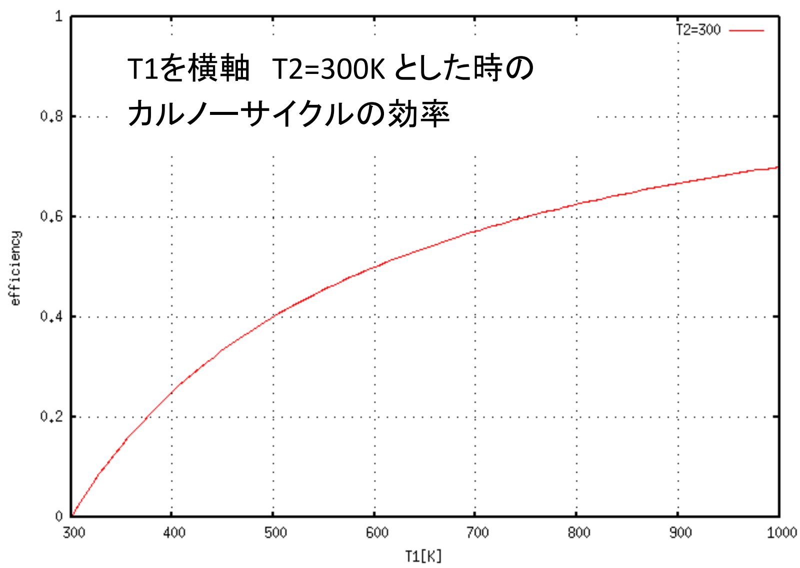
$$\boxed{\frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}} \qquad (3.73)$$

- 気体に入った熱量は $Q_1 + Q_2 = Q_1 - |Q_2|$。
- 気体のする仕事は $|W| = -W = Q_1 - |Q_2|$。

このサイクルでは、$T_2 > 0$ である限り、受け取った熱量 Q_1 のすべてを仕事に変換することはできない。

|W|=Q1+Q2　が成り立つので、第一法則も満たしている。





<<第13講終わり>>

<<第14講>>

3.5 熱力学第二法則・エントロピー

可逆過程と不可逆過程

$A \to B$ への変化があり、外部に何の変化も残さずに $B \to A$ へ戻せるとき、この過程を可逆過程という。そうでない場合を不可逆過程という。

熱現象では不可逆過程が多い。

- 温度の異なる気体や液体の混合。
- 運動する物体の摩擦による停止。

しかし、準静的過程は可逆過程であり、カルノーサイクルは $A \to D \to C \to B \to A$ の逆回しも可能（熱平衡を保ちながら、ゆっくりと Q, W を与える）。

熱力学第２法則

クラジウスの表現のみを考える。

クラウジウスの表現 熱を低温から高温に移し、それ以外に何の変化も残らないようにすることは不可能（熱が高温から低温に移る過程は不可逆）。

ケルビンの表現 外部から熱を吸収し、これを全部仕事にして外に出し、それ自身はもとの状態に戻る装置は不可能（第２種永久機関は不可能）。

プランクの表現 摩擦により熱が発生する現象は不可逆。

カルノーの定理

熱機関の効率を

$$\eta = \frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} \tag{3.74}$$

とすると、

$$\boxed{\eta \leq \eta_0 = \frac{T_1 - T_2}{T_1}} \tag{3.75}$$

η_0 はカルノーサイクルの効率。可逆過程の時等号が成立。この定理はクラウジウスの表現から説明できる。

クラジウスの定理

可逆過程では

(3.61),(3.68)より　$Q_1/T_1+Q_2/T_2=0$

さらに一般化して、温度がT_1・・・T_nのn個の熱源からそれぞれ熱量Q_1,・・・Q_nを受けてサイクルを行うとき、

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \begin{cases} = 0, (\text{可逆}) \\ < 0 (\text{不可逆}) \end{cases}$$

となる。

エントロピーS（不可逆過程の方向を決めるパラメータ）

閉じた系で不可逆過程が起きるとエントロピーは増大する。

=不可逆過程はエントロピーが増大する方向に進む。

エントロピーは状態量。

状態iからfへの変化でのエントロピーの変化を

$$\boxed{\Delta S = S(f) - S(i) = \int_i^f \frac{\mathrm{dQ}}{T} \qquad (3.77)}$$

と定義する。微分形では

$$dS = \frac{d'Q}{T} \tag{3.78}$$

$dU = d'Q - PdV$ から

$$dS = \frac{dU + PdV}{T} \tag{3.79}$$

（3.77の導出）

カルノーサイクルで $A \to B \to C$ という経路と $A \to D \to C$ という経路を考えると、

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \tag{3.76}$$

の関係がある。ここで Q_1、Q_2 はそれぞれの経路で入ってくる熱量。一般に、$A \to C$ の変化があるとき、経路を小さなカルノーサイクルの積み重ねと考えると、以下の積分量は経路によらない。

$$S(C) - S(A) = \int_A^C \frac{d'Q}{T} \tag{3.77}$$

理想気体では

$$d'Q = c_V dT + PdV = c_V dT + \frac{RT}{V} dV \tag{3.80}$$

だから、

$$\boxed{dS = c_V \frac{dT}{T} + R\frac{dV}{V}} \tag{3.81}$$

となるので、　積分

$$\begin{aligned} \boxed{S(T,V) \;=} \; & c_V \log T + R \log V + const. & (3.82)\\ = \; & c_V \left(\log T + \frac{R}{c_V} \log V\right) + const. & (3.83)\\ = \; & \boxed{c_V \log TV^{\gamma\text{-}1} + \mathrm{const}} & (3.84) \end{aligned}$$

ここで、$\gamma = c_P/c_V = (c_V + R)/c_V = 1 + R/c_V$。

エントロピーと確率

真空中への気体の膨張は不可逆過程であり、これは B の状態が起きる確率が A の状態が起きる確率より大きいということである。気体分子が N 個あるとして、B の状態の場合の数と A の状態の場合の数の比は

W_A:系がAの状態にある確率

$$\frac{W_B}{W_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^N \tag{3.92}$$

ある分子がどちらにあるかは、体積の比で確率が決まる。

よって、

$$\begin{aligned} S(B) - S(A) &= R \log V_B/V_A && (3.93) \\ &= R \log \left(\frac{W_B}{W_A}\right)^{1/N} && (3.94) \\ &= \frac{R}{N} \log W_B/W_A && (3.95) \end{aligned}$$

(3.82)と
W=Q=0がなので⊿U=0つまりT 一定　より

N をアボガドロ数とすれば、

$$S(B) - S(A) = k \log W_B/W_A \tag{3.96}$$

k はボルツマン定数。次式がエントロピーを定義するもうひとつの式になる。

$$\boxed{S = k \log W} \tag{3.97}$$

ボルツマンの式
意味するとことは：エントロピーはその状態の起きやすさのlog
エントロピーが増大する。：物理は起きやすい状態に向かう。 という解釈　になる。

エントロピー増大の法則

不可逆過程でエントロピーがどうなるか考える。

クラウジウスの式: 不可逆過程に対して、

Σであらわされていたものを積分形にした。

$$\oint \frac{d'Q}{T} < 0 \tag{3.85}$$

エントロピーを計算するには可逆過程を考える必要がある。

$A \rightarrow B$ を不可逆、$B \rightarrow A$ を可逆とすると、

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} + \int_B^A \frac{d'Q}{T} < 0 \tag{3.86}$$

$$\int_A^B \frac{d'Q}{T} + S(A) - S(B) < 0 \tag{3.87}$$

$$S(B) - S(A) > \int_A^B \frac{d'Q}{T} \tag{3.88}$$

不可逆過程として断熱不可逆過程を考えると $d'Q = 0$ なので

$$S(B) - S(A) > 0 \tag{3.89}$$

すなわち、断熱系（孤立系）のエントロピーは不可逆過程により必ず増大する。

不可逆過程でエントロピーが増大していることを確認する。

熱伝導

温度 T_1 の固体から温度 T_2 の固体に熱量 $d'Q$ が移動する $(T_1 > T_2)$。このとき

$$dS = \frac{-d'Q}{T_1} + \frac{d'Q}{T_2} = d'Q\frac{T_1 - T_2}{T1T_2} > 0 \tag{3.90}$$

注：この計算は準静的な可逆過程を用いて行われるべきであり、気体を媒介して熱が伝わると考える。

真空中への気体の膨張

温度変化がないので

$$\Delta S = S(B) - S(A) = R\log V_B - R\log V_A = R\log V_B/V_A > 0 \tag{3.91}$$

内部エネルギーは変化しないが、エントロピーは増大する。

<<第14講終わり>>

- 熱力学　まとめ地図

できて欲しいこと

Q：気体に与えた熱量
W：気体に与えた仕事
U：気体の内部エネルギー

気体分子運動論

導出は物理概念として重要。
3.25を誘導に乗って導出できるように。

$PV =$ nRT=Nk$_B$T　(3.8)

k$_B$=R/N$_A$

$$< \frac{1}{2}mv^2 > = \frac{3}{2}kT \qquad (3.25)$$

熱力学第一法則

3.32は覚えておこう。
3.38は誘導に乗って導出できればOK。

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W + Q \qquad (3.32)$$

$$dU = d'Q + d'W = d'Q - PdV \qquad (3.38)$$

c=dQ/dT　比熱の定義

定積・低圧比熱

$$c_P = c_V + R \qquad \gamma = c_P/c_V \qquad (3.48)$$

等温過程　$PV = const.$　(3.49)
断熱過程　$PV^\gamma = const.$　(3.51)

カルノーサイクルは。
言葉をp-V図にする、式を立てる、
得られた式の評価など、いじり倒せてほしい。

カルノーサイクルの効率

$$\frac{|W|}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \qquad (3.73)$$

エントロピー

$$\Delta S = S(f) - S(i) = \int_i^f \frac{dQ}{T} \qquad (3.77)$$

理想気体でのエントロピー

$$S(T, V) = c_V \log TV^{\gamma\text{-}1} + \mathrm{const} \qquad (3.82)$$

ボルツマンの式
$S = k \log W$　(3.97)