1　最低限の宇宙論

1. scale 因子: a

$$\frac{r(t)}{a(t)} = \frac{r(t_0)}{a(t_0)} \tag{1}$$

   r(t): 時刻 t での二点間の距離
   t_0: 現在（添字の 0 は現在を表す。）

2. ハッブル定数 (宇宙の膨張率): *H*,h

$$H = \frac{v(r,t)}{r(t)} = \frac{1}{a(t)}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$h = \frac{H_0}{100\ \mathrm{km/s/Mpc}} = 0.71^{+0.04}_{-0.03} \tag{3}$$

   $v(t) = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$：後退速度（遠くの物は速く逃げている。）
   H_0：現在のハッブル定数の値、超新星の赤方偏移等から求める。

3. 赤方偏移: Z

$$1 + Z = \frac{a(t_0)}{a(t)} \tag{4}$$

   Z=0：現在、Z+1=1100：水素原子生成期
   t 当時の scale は現在までに Z+1 倍に拡大されている。

4. 臨界密度：ρ_c

$$\rho_\mathrm{c} = 3H_0^2/8\pi G = 1.88h^2 \times 10^{-29}\ \mathrm{g/cm^3} = 1.05h^2 \times 10^{-5}\mathrm{GeV/cm^3} \tag{5}$$

   G：重力定数

5. 現在の密度パラメータ

$$\Omega_\mathrm{m} + \Omega_\mathrm{r} + \Omega_\Lambda = \Omega_\mathrm{tot} = 1 - \Omega_\mathrm{K} \tag{6}$$

   $\Omega_\mathrm{m} \equiv \rho_\mathrm{m}/\rho_\mathrm{c}$：物質の密度
   $\Omega_\mathrm{r} \equiv \rho_\mathrm{r}/\rho_\mathrm{c}$：放射の密度
   $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda/\rho_\mathrm{c}$：宇宙項
   $\Omega_\mathrm{tot} \equiv \rho_\mathrm{tot}/\rho_\mathrm{c}$：total density
   $\Omega_\mathrm{K} \equiv \rho_\mathrm{K}/\rho_\mathrm{c}$：曲率

6. 任意の時間のフリードマン方程式（変形）

$$H^2 = \left(\frac{1}{a(t)}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 = H_0^2\left(\left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^3\Omega_\mathrm{m} + \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^4\Omega_\mathrm{r} + \left(\frac{a(t_0)}{a(t)}\right)^2\Omega_\mathrm{K} + \Omega_\Lambda\right) \tag{7}$$

2　水素原子生成期の宇宙の大きさを現在見込む角度

簡単のため $\Omega_{\mathrm{m}} = 1, \Omega_{\mathrm{r}} = \Omega_{\mathrm{K}} = \Omega_{\Lambda} = 0$ として議論する。（実際、水素原子形成期 t_r では既に物質優勢。また、$a \ll a_0$ ならば、式 (7) の第三項、第四項は無視できる。）式 (7) は

$$H = \frac{1}{a(t)}\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} = H_0\left(\frac{a^3(t_0)}{a^3(t)}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{8}$$

時刻 t での地平線の大きさ $r_{\mathrm{H}}(t)$（光で見える距離）は、式 (1) より、

$$\frac{r_{\mathrm{H}(t)}}{a_{\mathrm{H}(t)}} = \int_0^t \frac{\mathrm{c}\mathrm{d}t'}{a(t')} \tag{9}$$

となり、式 (8) を用いると

$$r_{\mathrm{H}}(t_r) = a(t_r)\mathrm{c}\int_0^{a(t_r)} \frac{\mathrm{d}a'}{Ha'^2(t)} = \frac{2\mathrm{c}}{H_0}\left(\frac{a(t_r)}{a(t_0)}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\mathrm{c}}{H_0}\left(1+Z_r\right)^{-\frac{3}{2}} \tag{10}$$

となる。一方、現在の地平線の大きさは、$a(t) = a_(t_0)$ を式 10 を用い、Ω_K=Ω_Λ=0 を仮定すれば、

$$r_{\mathrm{H}}(t_0) = \frac{2\mathrm{c}}{H_0} \tag{11}$$

となる。式 (4),(10),(11) より、見込む角 θ は

$$\theta = \frac{(1+Z_r)r_H(t_r)}{r_H(t_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+Z_r}}[\mathrm{rad}] = 1.7^\circ \tag{12}$$

ここで、水素原子形成の時期について 1+Z_r=1100 を用いた。振動に寄与する長さのスケールはこの 46% であるので、0.8° となる。